1. (40 баллов) Два туриста выходят из исходного пункта с интервалом в полчаса и идут по прямому маршруту в другой пункт, находящийся в 20 км. Режим движения каждого туриста состоит из чередующихся 50-минутных интервалов ходьбы и 10-минутных привалов. Вышедший позднее турист шел быстрее и прибыл в пункт назначения на полчаса раньше другого, затратив на дорогу 3 час 50 мин. Каким было максимальное расстояние между туристами на маршруте (20 баллов)? Чему равнялась максимальная относительная скорость туристов (20 баллов)?

Ответ: Максимальное расстояние равно 2,4 км. Максимальная относительная скорость равна 6 км/ч.

Решение: Режим движения «быстрого» туриста состоял из 4 интервалов ходьбы и 3 привалов. Чистое время ходьбы этого туриста составило 200 мин и, следовательно, скорость ходьбы равнялась 6 км/ч. «Медленный» турист затратил на дорогу 4 ч 50 мин, и режим его движения состоял из 5 интервалов ходьбы и 4 привалов. У него чистое время ходьбы было 250 мин, а скорость ходьбы — 4,8 км/ч. Относительная скорость туристов была максимальной тогда, когда «быстрый» турист шел, а «медленный» находился на привале. Таким образом, максимальное значение относительной скорости равно скорости «быстрого» туриста, т.е. 6 км/ч. Расстояние между туристами было максимальным (2,4 км) в два момента времени — в момент начала движения «быстрого» туриста из исходного пункта и в момент его прихода в пункт назначения.

Разбалловка: Найдены скорости туристов – по 10 баллов

Найдено максимальное расстояние – 10 баллов

Найдена максимальная относительная скорость – 10 баллов

2. (30 баллов) Стоящий на столе куб с длиной ребра a сделан из материала, плотность которого меняется линейно с высотой от ρ_0 до $2\rho_0$. Чему равна масса куба (15 баллов)? Во сколько раз масса верхней половины куба больше массы нижней (15 баллов)?

Ответ: Масса куба равна $1.5\rho_0 a^3$. Масса верхней половины больше массы нижней в 1.4 раза.

Решение: Средняя плотность куба равна $1,5\rho_0$, что позволяет найти массу куба. Средняя плотность верхней половины равна $(7/4)\rho_0$, а нижней – $(5/4)\rho_0$. Отношение этих плотностей и дает отношение масс половин куба.

Разбалловка: Найдена средняя плотность куба – 5 баллов

Найдена масса куба – 10 баллов

Найдены средние плотности верхней и нижней половин куба – по 5 баллов.

Найдено отношение масс половин куба – 5 баллов.

3. (30 баллов) Два елочных шара с радиусами 3 см и 6 см сделаны из стекла одинаковой толщины. Считая стекло тонким, найти отношение масс шаров.

Ответ: Отношение масс шаров равно 4.

Решение: Из-за тонкости слоя стекла массу шара можно считать пропорциональной произведению толщины стекла на площадь поверхности шара. Поскольку толщина стекла у шаров одинакова, а площадь поверхности шара пропорциональна квадрату радиуса шара (это легко понять из соображений размерности), то массы шаров относятся как квадраты их радиусов.

Разбалловка: Понято, что отношение масс шаров равно

отношению площадей их поверхности – 10 баллов

Понято, что площадь поверхности шара пропорциональна квадрату радиуса — 10 баллов.

Найдено отношение масс – 10 баллов.