ОЛИМПИАДА “БУДУЩИЕ ИССЛЕДОВАТЕЛИ – БУДУЩЕЕ НАУКИ” 2014-2015
Физика, 9 класс, I тур (заочный)

1. (40 баллов) В момент $t = 0$ частица начинает движение вдоль оси x из точки $x = 0$ с постоянной скоростью V_0. Через время τ из этой же точки вдогонку выходит вторая частица с начальной скоростью $2V_0$ и постоянным ускорением $a_x = -a_0$ ($a_0 > 0$). При каком максимальном значении τ вторая частица догонит первую?

Ответ: Максимальное значение τ равно $V_0/(2a_0)$.
Решение:
Запишем зависимости координат 1-й и 2-й частиц от времени t:

$$x_1 = V_0 t, \qquad x_2 = 2V_0(t - \tau) - (a_0/2)(t - \tau)^2.$$

В момент, когда вторая частица догоняет первую, их координаты становятся равными: $x_2 = x_1$. Подставляя в это условие записанные выше выражения для координат частиц, получаем уравнение, определяющее момент времени t, когда частицы окажутся в одной точке (при любом заданном τ):

$$2V_0(t - \tau) - (a_0/2)(t - \tau)^2 = V_0 t.$$

Перепишем это уравнение в виде квадратного относительно переменной $(t - \tau)$:

$$a_0(t - \tau)^2 - 2V_0(t - \tau) + 2V_0\tau = 0.$$

Если дискриминант $4V_0^2 - 8a_0V_0\tau$ данного квадратного уравнения больше нуля, то уравнение имеет два положительных корня. Это означает, что 2-я частица оказывается в одной точке с 1-й в два разных момента времени, т.е., 2-я частица сначала обгоняет 1-ю, а затем отстает от нее. С увеличением времени задержки τ дискриминант уменьшается, а два корня уравнения сближаются. Максимальное значение τ, при котором 2-я частица догонит 1-ю, соответствует обращению в нуль дискриминанта: $4V_0^2 - 8a_0V_0\tau = 0$, откуда получаем $\tau = V_0/(2a_0)$.

Вместо анализа дискриминанта возможен другой способ решения. Нетрудно понять, что при максимальной задержке τ скорости частиц V_{1x} и V_{2x} будут одинаковыми в тот момент, когда частицы окажутся в одной точке. Подставляя скорости $V_{1x} = V_0$ и $V_{2x} = 2V_0 - a_0(t - \tau)$ в уравнение $V_{1x} = V_{2x}$, получаем выражение $t - \tau = V_0/a_0$. Подставляя далее эту формулу в полученное выше квадратное уравнение для $t - \tau$, находим значение τ.

2. (30 баллов) В цилиндрический сосуд налиты вода и масло с плотностями 1000 кг/м^3 и 800 кг/м^3 соответственно. После того, как в сосуд бросили шарик, уровень масла изменился на величину, вчетверо большую, чем изменение уровня воды. Чему равна плотность материала шарика?
Ответ: Плотность материала шарика равна 850 кг/м^3.

Решение:

Ясно, что шарик будет плавать на границе масло-вода. Действительно, если бы шарик стал плавать на поверхности масла (или целиком в масле), то уровень воды совсем не изменился бы, что противоречит условию. Если бы шарик целиком погрузился в воду, то изменения уровней воды и масла были бы одинаковыми (масло целиком бы поднялось вместе с уровнем воды).

Итак, шарик плавает на границе масло-вода. При этом подъем уровня воды определяется объемом погруженной части шарика (и сечением сосуда). Подъем уровня масла складывается из подъема уровня воды (вода поднимает масло) и увеличения толщины слоя масла, которое определяется погруженной в масло частью объема шарика (и, опять же, сечением сосуда). Нетрудно сообразить, что в воду погружена 1/4 объема шарика, а в масло 3/4 объема. Действительно, при этом увеличение толщины слоя масла будет в 3 раза больше подъема уровня воды, а подъем уровня масла будет в 4

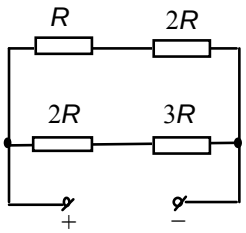
раза превышать подъем уровня воды, что и соответствует условию задачи. Чтобы найти плотность материала шарика $\rho_ш$, запишем условие его плавания в виде

$$\rho_ш V = \rho_в V/4 + \rho_м(3V/4),$$

где V – объем шарика, а $\rho_в$ и $\rho_м$ – плотности воды и масла. Отсюда получаем

$$\rho_ш = \rho_в/4 + (3/4)\rho_м = 850 \text{ кг/м}^3.$$

3. (30 баллов) Цепь из четырех резисторов подключена к источнику постоянного напряжения (см. рисунок). На каком из резисторов выделяется наименьшая мощность (10 баллов)? Чтобы на нем стала выделяться мощность большая, чем на любом из остальных резисторов, параллельно одному из них подключают шунт (еще один резистор). Какой из резисторов следует зашунтировать (10 баллов)? Каким должно быть сопротивление шунта (10 баллов)?



Ответ: Наименьшая мощность выделяется на резисторе $2R$ в нижней ветви цепи. Зашунтировать следует резистор $3R$. Сопротивление шунта должно быть меньше $(3/2)R$.

Решение:

Обозначив напряжение источника через U, запишем токи в верхней и нижней ветвях цепи как $U/(3R)$ и $U/(5R)$ соответственно. Записывая далее выражения для мощностей, выделяемых на каждом из резисторов, нетрудно определить, что минимальная мощность $(2/25)U^2/R$ выделяется на резисторе $2R$ нижней ветви. Для дальнейшего решения отметим также, что максимальная мощность $(2/9)U^2/R$ выделяется на резисторе $2R$ верхней ветви.

Чтобы увеличить мощность, выделяемую на резисторе $2R$ нижней ветви, нужно, очевидно, зашунтировать резистор $3R$. Действительно, это приведет к уменьшению сопротивления нижней ветви, увеличению тока в ней и, как результат, увеличению выделяемой на резисторе $2R$ мощности.

Обозначив искомое сопротивление шунта через $R_х$, запишем выражение для мощности, которая будет выделяться на резисторе $2R$ нижней ветви после подключения шунта: $2RU^2/(2R + R_\Sigma)^2$, где $R_\Sigma = 3RR_х/(3R + R_х)$. По условию эта мощность должна стать максимальной в цепи. Поскольку ток в верхней ветви не изменился после подключения шунта, то не изменилась и выделяемая на резисторах этой ветви мощность (в том числе, на резисторе $2R$, на котором выделялась максимальная мощность до подключения шунта). Записывая условие, что на резисторе $2R$ нижней ветви должна выделяться большая мощность, чем на резисторе $2R$ верхней ветви, т.е.,

$$2RU^2/(2R + R_\Sigma)^2 > (2/9)U^2/R,$$

находим

$$R_х < (3/2)R.$$

Заметим, что подключение шунта приводит к уменьшению выделяемой на резисторе $3R$ мощности, поэтому записанное выше условие является достаточным.