

## 11 класс

**11.1** Дан треугольник, у которого два угла  $\alpha, \beta$  удовлетворяют соотношению  $\cos \alpha + \cos \beta = \sin \alpha + \sin \beta$ . Обязательно ли этот треугольник прямоугольный?

**11.2.** В треугольнике  $ABC$  угол  $B$  равен  $60^\circ$ . На сторонах  $AB$  и  $BC$  отмечены точки  $M$  и  $N$  соответственно. Оказалось, что  $AM = MN = NC$ . Докажите, что точка пересечения отрезков  $CM$  и  $AN$  совпадает с центром окружности, описанной около  $\triangle ABC$ .

**11.3.** Сумму  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{45}$  представили в виде дроби со знаменателем  $45! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 45$ . Сколькими нулями (в десятичной записи) оканчивается числитель этой дроби?

**11.4.** В классе 30 человек, и к Новому Году каждый послал поздравительные письма не менее, чем 16 одноклассникам. Докажите, что было не менее 45 пар взаимных поздравлений.

## 11 класс

**11.1.** Найдите наименьший период функции  $y = \cos^{10} x + \sin^{10} x$ .

**11.2.** В копилке 1000 монет достоинством в 1 руб., 2 руб. и 5 руб. на общую сумму 2000 руб. Сколько в копилке монет каждого достоинства, если известно, что количество однорублевых монет – простое число.

**11.3.** Дан четырехугольник  $ABCD$ , в который можно вписать окружность. Докажите, что две окружности, вписанные в треугольники  $ABC$  и  $ADC$ , касаются диагонали  $AC$  в одной и той же точке.

**11.4.** а) Докажите неравенство  $\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} < \sqrt{9n+3}$  для всех натуральных чисел  $n$ ;  
б) существует ли такое натуральное  $n$ , для которого  $[\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n}] < [\sqrt{9n+3}]$ ? ( $[a]$  — целая часть числа  $a$ ).