Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Математика.
Финальный тур 2021/22. ***Время выполнения – 180 минут***

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
$+$ **20**	Полное верное решение
+. 16	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$ **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+\!/\!2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-.$ **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
$-$ **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

8 класс

8.1. Натуральное число n умножили на сумму цифр числа $3n$ и полученное число ещё умножили на 2. В результате получили 2022. Найдите n.

Ответ: 337. **Решение.** См. задачу 7.1

8.2. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M такая, что $AB = BM$ и $AM = MC$. Известно, что угол B в пять раз больше угла C. Найдите углы треугольника.

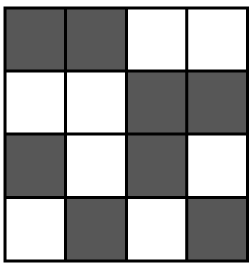
Ответ: $\angle A = 60°$, $\angle B = 100°$, $\angle C = 20°$. **Решение** . См. задачу 7.3

8.3. Найдите наибольшее натуральное число, все цифры которого различны, а произведение этих цифр представляет собой куб некоторого натурального числа.

Ответ: 984321. **Решение.** См. задачу 7.4

8.4. В клетчатом квадрате $n \times n$ каждая клетка окрашена в один из двух цветов: белый или черный. При каком наименьшем n всегда (т.е. при любой окраске) найдется прямоугольник, вершины которого совпадают с центрами четырех одинаково окрашенных клеток?

Ответ: $n = 5$. **Решение.** Докажем, что при $n = 5$ (а значит, и при $n > 5$) такой прямоугольник найдется. Рассмотрим нижнюю строку таблицы. В ней есть по меньшей мере 3 клетки одного цвета. Пусть для определённости это будут белые клетки. Тогда рассмотрим три столбца с этими клетками в основании, т.е. мы рассмотрим меньшую таблицу размера 5x3, нижняя строка которой состоит из трех белых клеток. Если в какой-нибудь из четырех оставшихся строк этой меньшей таблицы есть две белые клетки, то искомый «белый» прямоугольник образован их центрами и центрами соответствующих клеток нижней строки. Пусть теперь в каждой из этих четырех строк есть по меньшей мере две черные клетки. Тогда среди этих четырех строк будет хотя бы две строки с одинаковым расположением черных клеток, т.к. есть только 3 различных расположения двух черных (обозначим ч) клеток, а именно: (чч?), (ч?ч) и (?чч)), а значит их центры образуют «черный» прямоугольник. Пример раскраски квадрата 4×4, для которой нет искомого прямоугольника, см. на рисунке (легко убедиться, что для этого примера нет «одноцветных» прямоугольников даже со сторонами, не параллельными линиям сетки).



8.5. Девочки встали в хоровод, у некоторых надеты платочки. Хоровод назовём правильным, если у каждой девочки без платочка есть соседка в платочке. **а)** Каково минимальное количество платочков в правильном хороводе из 25 девочек? **б)** Докажите, что если в данном правильном хороводе из 25 девочек больше 12 платочков, то некоторые девочки могут снять платочки, а хоровод всё равно останется правильным.

Ответ: **а**) 9. **Решение.** **а)** Заметим, что у трёх подряд стоящих девочек есть хотя бы один платочек: иначе у стоящей посередине не было бы соседки в платочке. Зафиксируем в хороводе одну девочку в платочке, скажем, Таню, и будем рассматривать последовательно по часовой стрелке по три девочки после Тани. Всего таких троек 8, и в каждой из них есть хотя бы один платочек. Таким образом, всего платочков не меньше 1+8=9, и оценка получена. Теперь построим пример правильного хоровода с 9 платочками: для этого можно надеть платочек Тане, а в каждой из указанных троек – девочке, стоящей посередине. **б)** Пусть в хороводе больше 12 платочков. Зафиксируем теперь девочку без платочка, скажем, Олю (если у всех 25 девочек надеты платочки, то ситуация очевидна: любая может снять свой платочек). Оставшиеся 24 девочки разбиваются на шесть четвёрок, считая после Оли по часовой стрелке. Тогда в какой-то из четвёрок окажется не менее трёх платочков (по принципу Дирихле или рассуждая от противного: иначе всего платочков было бы не более $2 \cdot 6 = 12$). Поэтому из трёх девочек в платочках в этой четвёрке средняя девочка, очевидно, может снять свой платочек и хоровод останется правильным.