

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»  
по математике 2020/21 уч.г.

Отборочный тур. *Продолжительность 90 минут*

1 вариант

11 класс

- 11.1. Решите уравнение  $|x^2 - 100| = 10x + 90$ .
- 11.2. Дана треугольная пирамида  $SABC$  со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами  $SA, SB, SC$ . Докажите, что  $\triangle ABC$  остроугольный.
- 11.3. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $|x^2 - 4| = ax + 6$  имеет четыре различных корня.
- 11.4. Существует ли функция  $f$ , определённая для всех действительных чисел и удовлетворяющая тождествам:  $f(2 \cos^2 x) = 1 + \cos 4x$  и  $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$  ?

## 2 вариант

### 11 класс

- 11.1. Найдите наибольший член последовательности а)  $a_n = \frac{n}{n^2 + 2020}$ , б)  $a_n = \frac{2020^n}{n!}$   
(где  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ).
- 11.2. Найдите все значения параметра  $a$ , при которых уравнение  $5 + \cos 2x = 4a + 4a \sin x$  имеет решение.
- 11.3. Существует ли иррациональное число  $x \in [0.3; 0.4]$ , такое что  $x(x+1)(x+2)$  – целое число?
- 11.4. Докажите, что для любого остроугольного треугольника  $ABC$  можно построить треугольную пирамиду  $SABC$  со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами  $SA, SB, SC$ .

### 3 вариант

#### 11 класс

- 11.1.** Найдите множество значений функции  $y = |2 \sin x + 3 \cos x + 4|$ .
- 11.2.** На шахматную доску поставили 8 ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что в любом клетчатом прямоугольнике размера  $4 \times 5$  (клеток) есть хотя бы одна ладья.
- 11.3.** У прямоугольного треугольника  $ABC$  длина гипотенузы  $AB$  и катета  $AC$  удовлетворяют неравенствам  $100 < AB < 101$  и  $99 < AC < 100$ . Докажите, что  $\triangle ABC$  можно разбить на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона длины 1, причем существует разбиение, в котором таких треугольников не больше 21.
- 11.4.** У многочлена  $P(x)$  (отличного от константы) все коэффициенты неотрицательны. Может ли  $P(x)$  делиться на многочлен, у которого старший коэффициент положительный, а свободный член отрицательный?