Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
по математике 2020/21 уч.г.
Отборочный тур. ***Продолжительность 90 минут***
1 вариант

10 класс

10.1. Решите уравнение $|x^2-100|=10x+90$.

10.2. Дана треугольная пирамида $SABC$ со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами SA, SB, SC. Докажите, что ΔABC остроугольный.

10.3. Даны два положительных числа. Известно, что их сумма, а также сумма их кубов – числа рациональные. Можно ли утверждать, что **а)** сами числа рациональные? **б)** сумма их квадратов – число рациональное?

10.4. Внутри треугольника ABC взяли произвольную точку M. Через вершины треугольника и эту точку провели три отрезка до пересечения с противоположными сторонами. Докажите, что среди этих отрезков можно выбрать два таких, что точка M делит один из них (считая от вершины) в отношении ≥ 2, а другой – в отношении ≤ 2 .

2 вариант

10 класс

10.1. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы уравнений $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x^3 - 8y^3 - 6xy = 1. \end{cases}$

10.2. Сколько решений в целых числах x, y имеет неравенство $|y - x| + |3x - 2y| \le a$ **а**) при a=2; **б**) при a=20 ?

10.3. Существует ли иррациональное число $x_{\in[0.3;0.4]}$, такое что $x(x+1)(x+2)$ – целое число?

Поскольку P(0.3) = –0.103 , а P(0.4) = 0.344 – значения разных знаков, то на интервале $(0.3;0.4)$ это уравнение имеет корень. Обозначим его через x_0 и покажем, что x_0 – иррациональное число. В противном случае $x_0 = \frac{p}{q}$, где p, q – взаимно простые натуральные числа, и тогда $p(p+q)(p+2q) = q^3$. Если $q \ne 1$, то из взаимной простоты p и q следует, что в левой части все множители взаимно просты с q и значит, их произведение не может делиться на q (и тем более на q^3). Если q = 1, то очевидно, что уравнение $p(p+q)(p+2q) = 1$ не имеет натуральных решений (левая часть больше правой).

10.4. Докажите, что для любого остроугольного треугольника ABC можно построить треугольную пирамиду $SABC$ со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами SA, SB, SC.

3 вариант

10 класс

10.1. В трапеции $ABCD$ точка N – середина боковой стороны CD. Оказалось, что $\angle ANB = 90^0$. Докажите, что AN и BN – биссектрисы углов A и B соответственно.

10.2. На шахматную доску поставили 8 ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что в любом клетчатом прямоугольнике размера 4×5 (клеток) есть хотя бы одна ладья.

10.3. Найдите все такие квадратные трехчлены $P(x)=x^2+bx+c$, что $P(x)$ имеет целые корни, а сумма его коэффициентов (т.е. $1+b+c$) равна 10.

10.4. У прямоугольного треугольника ABC длина гипотенузы AB и катета AC удовлетворяют неравенствам $100<AB<101$ и $99<AC<100$. Докажите, что ΔABC можно разбить на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона длины 1, причем существует разбиение, в котором таких треугольников не больше 21.