

**Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»  
Математика. 2020-2021 учебный год  
Финальный тур. Продолжительность 180 минут.**

**10 класс**

- 10.1.** Решите уравнение  $(x^4 + x + 1)(\sqrt[3]{80} - \sqrt[3]{0,01}) = 2(\sqrt[3]{5,12} + \sqrt[3]{0,03375})$ .
- 10.2.** Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?
- 10.3.** На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $M$  такая, что  $\angle BAM = \angle BCA$ . Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , лежит на прямой, проходящей через точку  $B$  и перпендикулярной  $AM$ .
- 10.4.** Последовательность целых чисел  $a_n$  задается следующим образом:  $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ ,  $a_1 = 100$ . Докажите, что любые два различных члена последовательности взаимно просты.
- 10.5.** Дано 10 чисел: 10, 20, 30, ..., 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т.д. Можно ли в результате нескольких операций получить: а) все одинаковые числа? б) все числа, равные 200?