

**Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
по математике 2020/21 уч.г.
Отборочный тур. *Продолжительность 90 минут***

Общие критерии оценивания

Каждая из четырёх задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы- Баллы	Правильность (ошибочность) решения
$+$ 25	Полное верное решение
$+$. 20	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$ 16	Решение в целом верное, но содержит мелкие ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$\frac{+}{2}$ 13	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$ 10	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-.$ 5	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
$-$ 0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 0	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 13 баллов. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm \uparrow$ будет соответствовать 17 баллам.

1 вариант

9 класс

9.1. Решите уравнение $|x^2 - 100| = 2x + 1$.

Ответ. $x_1 = 1 + \sqrt{102}$, $x_2 = 9$. **Решение.** Если $x^2 - 100 \geq 0$, т.е. при условии $|x| \geq 10$, имеем уравнение $x^2 - 2x - 101 = 0$, его корни $x = 1 \pm \sqrt{102}$. Корень $1 + \sqrt{102}$ удовлетворяет условию $|x| \geq 10$, а корень $1 - \sqrt{102}$ – нет. Если $|x| < 10$, то имеем уравнение $x^2 + 2x - 99 = 0$, его корни $x = -1 \pm 10$, и условию $|x| < 10$ удовлетворяет только корень $x = 9$.

9.2. Замените две звездочки двумя разными числами так, чтобы получилось тождественное равенство:
 $(3x - *)(2x + 5) - x = 6x^2 + 2(5x - *)$.

Ответ. 2 и 5. **Решение.** См. задачу 8.2.

9.3. Даны два положительных числа. Известно, что их сумма, а также сумма их кубов – числа рациональные. Можно ли утверждать, что а) сами числа рациональные? б) сумма их квадратов – число рациональное?

Ответ. а) Нет. б) Да, можно. **Решение.** а) В качестве примера можно взять числа $a = 2 + \sqrt{2}$, $b = 2 - \sqrt{2}$, тогда $a + b = 4$ и легко подсчитать (по формуле куба суммы): $a^3 + b^3 = 40$ б) Пусть числа $x = a + b$ и $y = a^3 + b^3$ рациональны. Тогда $x^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = y + 3x \cdot ab$. Отсюда $ab = \frac{x^3 - y}{3x}$ – рациональное число. Поэтому число $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ также рационально.

9.4. Внутри треугольника ABC взяли произвольную точку M . Через вершины треугольника и эту точку провели три отрезка до пересечения с противоположными сторонами. Докажите, что среди этих отрезков можно выбрать два таких, что точка M делит один из них (считая от вершины) в отношении ≥ 2 , а другой – в отношении ≤ 2 .

Решение. Пусть для определенности площади треугольников AMB , BMC и AOC упорядочены так:

$$S_{AMB} \leq S_{BMC} \leq S_{AMC}. \quad (*)$$

Тогда $S_{AMB} \leq S/3$, а $S_{AMC} \geq S/3$, где S – площадь треугольника ABC . Предположим, от противного, что в точке M все указанные отрезки делятся в отношении, меньшем двух. Тогда в треугольниках ABC и ABM отношение высот на сторону AB из точек C и M (соответственно) меньше трёх, что противоречит неравенству $S \geq 3S_{AMB}$. Аналогичное противоречие получается для треугольника AMC (при рассмотрении высот из вершин B и M на сторону AC), если предположить, что все отношения для отрезков больше двух. Таким образом, мы указали два искомых отрезка из вершин C и B . *Комментарий.* 1) Другое доказательство состоит в том, чтобы разбить треугольник прямыми, проходящими через точку пересечения медиан параллельно сторонам на 6 областей и далее проверить в каждой из областей, какая пара отрезков удовлетворяет требуемым неравенствам. 2) Из доказательства следует, что если в двойном нестрогом неравенстве (*) на самом деле имеют место равенства, то M – точка пересечения медиан, и отношения для всех трёх отрезков равны 2.

2 вариант

9 класс

9.1. Существуют ли такие нецелые числа x, y , что числа $6x + 5y$ и $13x + 11y$ – целые?

Ответ: не существуют. **Решение** См. задачу 8.3.

9.2. Можно ли куб разбить на 2020 кубиков?

Ответ: да, можно. **Решение** См. задачу 8.2.

9.3. Сколько решений в целых числах x, y имеет неравенство $|y - x| + |3x - 2y| \leq a$ а) при $a=2$; б) при $a=20$?

Ответ: а) 13; б) 841. Решение. Обозначим $m = y - x, n = 3x - 2y$, тогда (выражая из этих уравнений x, y) получим $x = 2m + n$ и $y = 3m + n$ и значит, целым m, n соответствуют целые x, y (и наоборот), т.е. имеется взаимно однозначное соответствие между упорядоченными парами (m, n) и (x, y) . Таким образом, требуется определить, сколько пар (m, n) целых чисел удовлетворяют неравенству $|m| + |n| \leq a$.
а) При $a=2$ такие пары легко перечислить: это четыре пары $(\pm 1, \pm 1)$ плюс четыре пары $(\pm 1, 0)$, $(\pm 2, 0)$ плюс четыре пары $(0, \pm 1)$, $(0, \pm 2)$ и еще одна нулевая пара $(0, 0)$. Итого 13 пар (m, n) , соответствующих 13 решениям исходного неравенства. **б)** Найдем сначала количество пар натуральных чисел (m, n) , для которых $m + n = c$ при данном натуральном c . Легко видеть, что количество таких пар равно $c - 1$ (решения – это пары $(1, c - 1), (2, c - 2), \dots, (c - 1, 1)$). Поэтому количество пар натуральных чисел, удовлетворяющих неравенству $m + n \leq 20$, равно $1 + 2 + \dots + 19 = 190$. Тогда всего пар целых ненулевых чисел, удовлетворяющих неравенству $|m| + |n| \leq a$, будет в 4 раза больше, т.е. 760. Количество решений вида $(m, 0)$ равно 41 (это пары $(-20, 0), (-19, 0), \dots, (20, 0)$) и, аналогично, есть 41 решение вида $(0, n)$, но при этом нулевую пару мы засчитали дважды. Итак, всего решений $760 + 41 + 40 = 841$.

9.4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Оказалось, что периметр $\triangle AMC$ равен периметру $\triangle CNA$, а периметр $\triangle ANB$ равен периметру $\triangle CMB$. Докажите, что $\triangle ABC$ равнобедренный.

Решение. См. задачу 8.4.

3 вариант

9 класс

9.1. В трехзначном числе зачеркнули первую цифру и получили двузначное. Если на это двузначное число поделить исходное, то частное будет равно 9, а остаток 8. Найдите исходное число. (Приведите все возможные решения.)

Ответ: 4 возможных числа: 224; 449; 674; 899. **Решение.** Пусть x – первая цифра исходного числа, y – двузначное число после зачеркивания x . Тогда имеем уравнение $100x + y = 9y + 8 \Leftrightarrow 2y + 2 = 25x$. Значит, x – четное число: $x = 2z$ для некоторого z ($z \leq 4$). Поэтому $y + 1 = 25z$, и для числа $y + 1$ возможные значения: 25; 50; 75; 100, а соответствующие числа x равны 2; 4; 6; 8.

9.2. В трапеции $ABCD$ точка N – середина боковой стороны CD . Оказалось, что $\angle ANB = 90^\circ$. Докажите, что AN и BN – биссектрисы углов A и B соответственно.

Решение Пусть M – середина AB . Рассмотрим $\triangle BMN$. Имеем $MB = MN$ (по свойству медианы прямоугольного треугольника ANB), поэтому $\angle NBM = \angle BNM$. Далее, $\angle BNM = \angle NBC$, т.к. средняя линия трапеции параллельна основаниям. Итак, $\angle NBM = \angle NBC$. Аналогично получим, что $\angle NAM = \angle NAD$.

9.3. Найдите все такие квадратные трехчлены $P(x) = x^2 + bx + c$, что $P(x)$ имеет целые корни, а сумма его коэффициентов (т.е. $1 + b + c$) равна 10.

Ответ: $(x - 2)(x - 11)$, $(x - 3)(x - 6)$, $x(x + 9)$, $(x + 4)(x + 1)$. **Решение.** Пусть $x_1 < x_2$ – корни. Тогда $P(x) = (x_1 - x)(x_2 - x)$ и $P(1) = 10 = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Из разложений числа 10 на два сомножителя получим возможные значения множителей $(x_1 - 1)$ и $(x_2 - 1)$, а именно: 1) 1 и 10; 2) 2 и 5; 3) –10 и –1, 4) –5 и –2. Отсюда следует результат.

9.4. а) Докажите, что в любом выпуклом четырехугольнике найдутся две стороны, которые меньше по длине, чем наибольшая диагональ. б) Может ли быть ровно две таких стороны?

Ответ. См. задачу 8.4.