**Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»**
**Математика. 2020-2021 учебный год**
**Финальный тур.** *Продолжительность 180 минут.*

**Общие критерии оценивания**

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

| **Символы-Баллы** | **Правильность (ошибочность) решения** |
|---|---|
| + **20** | Полное верное решение |
| +. **16** | Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение. |
| ± **12** | Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений. |
| $+/2$ **10** | Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка. |
| ∓ **8** | Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи. |
| −. **4** | Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения. |
| − **0** | Решение неверное, продвижения отсутствуют. |
| 0 **0** | Решение отсутствует (участник не приступал) |

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах») при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

## 9 класс

**9.1**. Существуют ли такие нецелые числа $x$, $y$, что оба числа $5x + 7y$ и $7x + 10y$ целые?

**Ответ:** Не существуют. **Решение.** Пусть $5x + 7y = m$, $7x + 10y = n$, где $m$ и $n$ – целые. Решим эту систему уравнений, домножив первое уравнение на 10, а второе – на 7. Вычитая полученные уравнения, будем иметь $x = 10m – 7n$, т.е. $x$ - целое число.

**9.2**. В треугольнике $ABC$ угол $A$ наибольший. Точки $M$ и $N$ симметричны вершине $A$ относительно биссектрис углов $B$ и $C$ соответственно. Найдите $\angle A$, если $\angle MAN = 50°$.

**Ответ:** 80°. **Решение**. См. задачу 8.2

**9.3** Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?

**Ответ: 4. Решение.** Пусть гипотенуза прямоугольного треугольника равна $x$, один из катетов – $y$, а другой – 2021. Тогда по теореме Пифагора $x^2 – y^2 = 2021^2$, т.е. $(x – y)\cdot(x + y) = 2021^2$. Учитывая, что $x > y$, имеем: $x + y > x – y > 0$. Так как разложение 2021 на простые множители имеет вид $2021 = 43\cdot 47$, то разложение $2021^2$ на простые множители есть $2021^2 = 43^2\cdot 47^2$ и поэтому $2021^2$ можно представить в виде произведения двух натуральных чисел пятью способами:

$2021^2 = 1\cdot(43^2\cdot 47^2) = 43\cdot(43\cdot 47^2) = 47\cdot(43^2\cdot 47) = 43^2\cdot 47^2 = (43\cdot 47)\cdot(43\cdot 47)$.

Поскольку в произведении $(x – y)\cdot(x + y)$ множители различны и второй множитель больше первого, то имеем четыре системы из двух уравнений:

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x+y=2021^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=43, \\ x+y=43\cdot 47^2; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=47, \\ x+y=43^2\cdot 47; \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=43^2, \\ x+y=47^2. \end{cases}$$

При решении каждой из этих систем получаем, очевидно, натуральные $x$, $y$ (что следует из нечетности правых частей). Следовательно, существует четыре прямоугольных треугольника с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021.

**9.4**. 25 учеников класса, среди которых $n$ мальчиков, сидят за большим круглым столом. Обязательно ли найдутся два мальчика, между которыми (по часовой стрелке) сидят ровно 4 человека, если **а**) $n$=10; **б**) $n$=11?

**Ответ: а**) не обязательно; **б**) обязательно. **Решение.** См. задачу 8.5.

**9.5.** Дано 10 чисел: 10, 20, 30,..., 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т.д. Можно ли в результате нескольких операций получить: **а**) все одинаковые числа? **б**) все числа, равные 200?

**Ответ: а)** можно, **б)** нельзя. **Решение. а)** Покажем, как проделать три операции с числами $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, чтобы в результате нескольких троек операций все числа стали равными. Пусть $m$ – наименьшее, а $M$ – наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Сосчитаем сумму

$$S = (a_1 - m) + (a_2 - m) + \ldots + (a_{10} - m)$$

Если $M = m$, то все числа одинаковые и $S = 0$. Если же $M > m$, то $S > 0$ и мы проделаем следующие три операции, которые $S$ уменьшат на единицу, а значит через несколько таких операций сделают $S$ равным нулю. Эти три операции заключаются в прибавлении по 1 к трем тройкам чисел; если, для определенности, $a_{10} = M$, то эти тройки таковы: $\{a_1, a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6\}, \{a_7, a_8, a_9\}$. В результате этих трех операций все числа, кроме $a_{10}$, станут больше на 1 и $m$ станет больше на 1, т.е. $S$ уменьшится на 1. **б)** Покажем, что это невозможно. В результате каждой операции сумма чисел увеличивается на 3, значит за $n$ операций она увеличится на $3n$. Вначале эта сумма равнялась $10 + 20 + \ldots + 100 = 550$, т.е. давала остаток 1 при делении на 3. В конце сумма должна равняться 2000, т.е. остаток при делении на 3 должен стать равным 2, что невозможно.