

**Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
по математике 2020/21 уч.г.
Отборочный тур. *Продолжительность 90 минут***

Общие критерии оценивания

Каждая из четырёх задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставаемых баллов приведено в таблице.

Символы- Баллы	Правильность (ошибочность) решения
$+$ 25	Полное верное решение
$+. 20$	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± 16	Решение в целом верное, но содержит мелкие ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$\frac{+}{2} 13$	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ 10	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-. 5$	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
$- 0$	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
$0 0$	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 13 баллов. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm \uparrow$ будет соответствовать 17 баллам.

1 вариант

8 класс

- 8.1.** Велосипедист ехал сначала со скоростью 20(км/час). но проехав треть пути, он взглянул на часы и решил увеличить скорость на 20%. С новой скоростью он ехал всю оставшуюся часть пути. Какова средняя скорость велосипедиста?

Ответ: 22,5 км/час. **Решение.** См. задачу 7.1.

- 8.2.** Замените две звездочки двумя разными числами так, чтобы получилось тождественное равенство:
 $(3x - *) (2x + 5) - x = 6x^2 + 2(5x - *)$.

Ответ. 2 и 5. **Решение.** Обозначим через A и B числа, соответствующие первой и второй звездочкам. Тогда перемножая скобки по алгебраическим правилам и приравнявая коэффициенты при x и свободные члены, получим: $14 - 2A = 10$, $-5A = -2B$. Отсюда $A = 2$, $B = 5$.

- 8.3.** Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$ и точка M внутри него, не лежащая на диагоналях. Докажите, что хотя бы один из углов $\angle AMC$ или $\angle BMD$ тупой.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей и пусть, для определенности, точка M лежит внутри треугольника BOC . Тогда

$$\begin{aligned}\angle BMD + \angle AMC &= \angle BMA + \angle AMD + \angle AMD + \angle DMC > \\ &> \angle BMA + \angle AMD + \angle DMC = 360^\circ - \angle BMC > 180^\circ.\end{aligned}$$

Если бы оба угла $\angle AMC$ и $\angle BMD$ не были тупыми, то их сумма была бы не больше 180° . Значит, хотя бы один из этих углов тупой.

- 8.4.** Сумма десяти различных натуральных чисел больше 144. Докажите, что среди этих десяти чисел найдутся три числа, сумма которых не меньше 54.

Решение. См. задачу 7.4.

2 вариант

8 класс

8.1. У 92-значного натурального числа n известны первые 90 цифр: с 1-й по 10-ю – единицы, с 11-й по 20-ю – двойки, и так далее, с 81-й по 90-ю – девятки. Найдите последние две цифры числа n , если известно, что n делится на 72.

Ответ. 36. **Решение** См. задачу 7.2.

8.2. Можно ли куб разбить на 2020 кубиков?

Ответ: можно. **Решение.** Пусть у нас есть единичный куб. Построить его разбиение можно, например, следующим образом на основе равенства $2020 = 999 + 999 + 6 + 8 + 8$, а именно. разобьем сначала куб на 1000 одинаковых кубиков с ребром $\frac{1}{10}$, затем один из этих кубиков разобьем на 1000 кубиков с ребром $\frac{1}{100}$, затем один из получившихся кубиков разобьем на 8 кубиков с ребром $\frac{1}{200}$, и, наконец, два из этих восьми разобьем еще на 8 кубиков (каждый) с ребром $\frac{1}{400}$. Итого получим 999 кубиков с ребром $\frac{1}{10}$ плюс 999 с ребром $\frac{1}{100}$ плюс 6 с ребром $\frac{1}{200}$ плюс 16 с ребром $\frac{1}{400}$. *Комментарий.* Можно привести различные примеры разбиений. Например, на основе равенства $2020 = 7 \cdot 281 + 26 + 27$ получается следующее разбиение. Разобьем сначала куб на 8 кубиков с ребром 8^{-1} , затем один из этих кубиков разобьем еще на 8 кубиков с ребром 8^{-2} , и так далее, доходим до 8 кубиков с ребром 8^{-281} , затем один из таких кубиков разобьем на 27 кубиков с ребром $8^{-281} \cdot 27^{-1}$ и, наконец, разбиваем один из этих кубиков на 27 кубиков с ребром $8^{-281} \cdot 27^{-2}$.

8.3. Существуют ли такие нецелые числа x, y , что числа $6x + 5y$ и $13x + 11y$ – целые?

Ответ. Не существуют. **Решение.** Пусть $6x + 5y = m$, $13x + 11y = n$, где m и n – целые. Решим эту систему уравнений, домножив первое уравнение на 11, а второе – на 5. Вычитая полученные уравнения, будем иметь $x = 11m - 5n$, т.е. x – целое число.

8.4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и N соответственно. Оказалось, что периметр $\triangle AMC$ равен периметру $\triangle CNA$, а периметр $\triangle ANB$ равен периметру $\triangle CMB$. Докажите, что $\triangle ABC$ равнобедренный.

Решение. Будем обозначать периметр буквой P . Из условия задачи имеем $P(\triangle AMC) + P(\triangle CMB) = P(\triangle CNA) + P(\triangle ANB)$. Отсюда $P(\triangle ABC) + 2 \cdot CM = P(\triangle ABC) + 2 \cdot AN$. Значит $CM = AN$. Из этого соотношения, учитывая равенство периметров треугольников AMC и CAN , получим, что $AM = NC$. Поэтому треугольники AMC и CAN равны по трем сторонам. Тогда $\angle A = \angle C$, значит, $\triangle ABC$ равнобедренный.

3 вариант

8 класс

8.1. В 8а классе по списку 60% девочек. Когда из-за болезни в класс не пришли два мальчика и одна девочка, то девочек присутствовало 62,5%. Сколько в классе по списку девочек и мальчиков?

Ответ. 21 девочка и 14 мальчиков. **Решение** См. задачу 7.1.

8.2. Докажите, что для всех натуральных $n > 1$ число $n^{2020} + 4$ составное.

Решение следует из равенств $n^{2020} + 4 = n^{2020} + 4 + 4n^{1010} - 4n^{1010} = (n^{1010} + 2)^2 - (2n^{505})^2 = (n^{1010} + 2 + 2n^{505})(n^{1010} + 2 - 2n^{505})$. Очевидно, при $n > 1$ обе скобки > 1 .

8.3. Найдите шестизначное число, которое после умножения на 9 записывается теми же цифрами, что исходное число, но в обратном порядке? Сколько таких шестизначных чисел?

Ответ. 109989 – единственное число. **Решение** См. задачу 7.3.

8.4. а) Докажите, что в любом выпуклом четырехугольнике найдутся две стороны, которые меньше по длине, чем наибольшая диагональ. б) Может ли быть ровно две таких стороны?

Ответ: б) да, может. Решение а) Из четырех углов четырехугольника $ABCD$ хотя бы один – неострый (т.к. в сумме углы составляют 360°). Пусть это будет угол A . Тогда в $\triangle ABD$ имеем $BD > AB$ и $BD > AD$ (т.е. AB и AD меньше диагонали BD , а значит, меньше наибольшей диагонали) стороны. **б)** Рассмотрим пример. Пусть ABC – равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны $AB = BC$ больше основания AC (это означает, что угол при вершине меньше 60 градусов). Пусть M – середина AC . Продолжим высоту BM и возьмем на продолжении точку D такую, что $MD < AB - BM$ (это возможно, т.к. в треугольнике ABM гипотенуза AB больше катета BM). Тогда $ABCD$ – искомый четырехугольник.