Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика. 2020-2021 учебный год
Финальный тур. *Продолжительность 180 минут.*

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы		**Правильность (ошибочность) решения**
$+$	**20**	Полное верное решение
$+.$	**16**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$	**12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$	**10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$	**8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-.$	**4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
$-$	**0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	**0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах») при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

8 класс

8.1. В четырехзначном числе Петя зачеркнул первую цифру и получил трехзначное число. Затем он разделил исходное числа на это трехзначное и получил частное 3, а остаток 8. Чему равно исходное число? (Найдите все возможные числа).

Ответ: 1496 или 2996**. Решение**. См. задачу 7.1.

8.2. В треугольнике ABC угол A наибольший. Точки M и N симметричны вершине A относительно биссектрис углов B и C соответственно. Найдите $\angle A$, если $\angle MAN = 50°$.

Ответ: 80°. **Решение**. Пусть $\angle A=\alpha,\ \angle B=\beta,\ \angle C=\gamma$. Тогда $\angle AMB=90°-\dfrac{\beta}{2}$, $\angle ANC=90°-\dfrac{\gamma}{2}$ (т.к. треугольники AMB и ANC равнобедренные). Поэтому $\angle MAN=180°-\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)-\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)=\dfrac{\beta+\gamma}{2}=90°-\dfrac{\alpha}{2}$. Из условия задачи $90°-\dfrac{\alpha}{2}=50°$, и значит, $\alpha = 80°$.

8.3. Клетчатый прямоугольник со стороной клетки 1см и площадью 2021 см ^{2} двумя перпендикулярными разрезами вдоль линий сетки разрезали на четыре прямоугольные части. Докажите, что хотя бы у одной из частей площадь не менее 528 см ^{2}.

Решение. См. задачу 7.4.

8.4. Вдоль окружности записали в некотором порядке 25 чисел: 1, 2, …, 25. Могло ли оказаться так, что любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо в несколько (целое число) раз?

Ответ: не могло. **Решение.** См. задачу 7.5.

8.5. 25 учеников класса, среди которых n мальчиков, сидят за большим круглым столом. Обязательно ли найдутся два мальчика, между которыми (по часовой стрелке) сидят ровно 4 человека, если **а**) n=10; **б**) n=11?

Ответ: а) не обязательно; **б**) обязательно. **Решение. а**) Построим пример. Пронумеруем места за столом по часовой стрелке: 1, 2, …, 25. Если 10 мальчиков сидят на местах 1, 2, 3, 4, 5 (первая группа) и 11, 12, 13, 14, 15 (вторая группа), то *по часовой стрелке* между мальчиками одной и той же группы сидит не больше трёх человек, между мальчиками первой и второй группы – не меньше пяти человек, а между мальчиками второй и первой группы – не меньше десяти человек. **б**) Будем считать, что все ученики сидят в вершинах правильного 25-угольника, обозначим их $A_1, A_2, \dots, A_{25}$. Они представляют собой вершины пяти правильных пятиугольников: первый из них – пятиугольник $A_1\ A_6\ A_{11}\ A_{16}\ A_{21}$, а каждый следующий получается сдвигом на угол $360^\circ/25$ по часовой стрелке (т.е. номера вершин в каждом пятиугольнике дают одинаковые остатки при делении на 5). Поскольку мальчиков 11, а пятиугольников 5, то хотя бы три мальчика будут «вершинами» одного из пятиугольников. Но тогда в этом пятиугольнике из данных трёх вершин хотя бы две будут соседними. А в 25-угольнике эти две вершины и окажутся искомой парой, т.к. между ними (по часовой стрелке) ровно 4 вершины 25-угольника.