Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
по математике 2020/21 уч.г.
Отборочный тур. ***Продолжительность 90 минут***

Общие критерии оценивания

Каждая из четырёх задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
$+$ **25**	Полное верное решение
$+.$ **20**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$ **16**	Решение в целом верное, но содержит мелкие ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$ **13**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$ **10**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-.$ **5**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
$-$ **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 13 баллов. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 17 баллам.

1 вариант

7 класс

7.1. Велосипедист ехал сначала со скоростью 20(км/час). но проехав треть пути, он взглянул на часы и решил увеличить скорость на 20%. С новой скоростью он ехал всю оставшуюся часть пути. Какова средняя скорость велосипедиста?

Ответ: 22,5 км/час. **Решение**. Пусть a – длина пути, v= 20(км/час) – начальная скорость. Тогда новая скорость равна 1,2 v. Весь путь велосипедист проедет за $\frac{a}{3v}+\frac{2a}{3\cdot 1{,}2v}=\frac{8}{9}\frac{a}{v}$ (час). Таким образом, средняя скорость равна $a:\frac{8}{9}\frac{a}{v}=\frac{9}{8}v=22{,}5$ (км/час).

7.2. Две соседних стороны прямоугольника относятся как 3:7. Чему равна площадь прямоугольника, если его периметр равен 40 см?

Ответ: $84\,\text{см}^2$. **Решение**. Пусть x – меньшая сторона прямоугольника, тогда $\frac{7}{3}x$ – большая сторона. Из условий задачи получаем уравнение 2(x+$\frac{7}{3}x$) = 40. Отсюда x = 6(см), и площадь равна $x\frac{7}{3}x==84$ (см^2).

7.3. К числу 2020 припишите справа две цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 36. Найдите все возможные решения.

Ответ. 32 или 68. **Решение**. Заметим, что 36 = 9·4. Поскольку сумма первых четырех цифр равна 4, то по признаку делимости на 9 сумма двух последних цифр полученного числа может быть либо 5, либо 14. В первом случае искомые две цифры должны давать число 32 (другие варианты с суммой 5 – это 05, 14, 23, 41 и 50, и все они не подходят из-за признака делимости на 4). Во втором случае получаем только вариант 68, т.к. варианты 59, 77, 86 и 95 не подходят также в силу признака делимости на 4. Другой способ решения такой: поделим с остатком 202000 на 36, неполное частное будет равно 5611, а остаток равен 4; далее прибавим к числу 201996 (равному 202000– 4) числа, кратные 36, и получим 201996+36=202032 и 201996+72=202068 (а прибавление следующего числа, кратного 36, т.е.108, даст число с первыми цифрами 2021).

7.4. Сумма десяти различных натуральных чисел больше 144. Докажите, что среди этих десяти чисел найдутся три числа, сумма которых не меньше 54.

Решение. Пусть $a<b<c$ – три наибольших числа среди данных. Если $a\geq 17$, то $a+b+c\geq$ 17+18+19 = 54, и утверждение доказано. Рассмотрим теперь случай a ≤ 16 и предположим противное к утверждению задачи. Тогда $a+b+c<54$, а остальные (меньшие) семь чисел из данных десяти в сумме дают число не более 15+14+13+12+11+10+9 = 84. Значит, сумма всех десяти чисел не более 54+84 = 138 < 144, т.е. получили противоречие.

2 вариант

7 класс

7.1. Коля и Петя обменялись марками. До обмена у Коли было на 5 марок больше, чем у Пети. После того, как Коля обменял 24% своих марок на 20% марок Пети, у Коли стало на одну марку меньше, чем у Пети. Сколько марок было у мальчиков до обмена?

Ответ. У Пети было 45 марок, у Коли – 50 марок. **Решение.** Пусть до обмена у Пети было x марок, тогда у Коли было (x + 5) марок. После обмена у Пети стало $x-\frac{x}{5}+(x+5)\cdot\frac{6}{25}$, а у Коли $x+5-(x+5)\cdot\frac{6}{25}+\frac{x}{5}$. Решая уравнение $x-\frac{x}{5}+(x+5)\cdot\frac{6}{25}-x-5+(x+5)\cdot\frac{6}{25}-\frac{x}{5}=1$, находим $x = 45$.

7.2. У 92-значного натурального числа n известны первые 90 цифр: с 1-й по 10-ю – единицы, с 11-й по 20-ю – двойки, и так далее, с 81-й по 90-ю – девятки. Найдите последние две цифры числа n, если известно, что n делится на 72.

Ответ. 36. **Решение.** Обозначим последние цифры x и y. Число n должно делиться на 9 и 8. Число, состоящее из первых 90 цифр, делится на 9, так как его сумма цифр делится на 9. Значит, и число $\overline{xy}$ делится на 9. Кроме того, по признаку делимости на 4, число $\overline{xy}$ делится на 4. Поэтому $\overline{xy}$ равно либо 00, либо 36, либо 72. Поскольку n делится на 8, то число $\overline{9xy}$ (состоящее из последних трех цифр) делится на 8. Из чисел 900, 936 и 972 только 936 обладает этим свойством.

7.3. а) Можно ли числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 переставить так, чтобы соседние числа отличались либо на 2, либо на 3? б) Аналогичная задача для ста чисел 1, 2, 3,…, 100.

Ответ. а) Можно: например так: 1,3,6,8,5,2,4,7; б) Можно: например так: 1,3,5,2,4, 6,8,10,7,9,….

Решение. **а**) Построить пример помогает граф возможных соседей. **б**) Очередная пятерка чисел $5k + 1$, $5k + 3$, $5k + 5$, $5k + 2$, $5k + 4$ предшествует следующей пятерке $5(k + 1) + 1$, $5(k + 1) + 3$, $5(k + 1) + 5$, $5(k + 1) + 2$, $5(k + 1) + 4$ и так далее.

7.4. Дан прямоугольник, отличный от квадрата, у которого численное значение площади равно утроенному периметру. Докажите, что одна из сторон прямоугольника больше 12.

Решение. Пусть a, b – стороны прямоугольника. По условию, $ab = 3(2a+2b)$. Отсюда, разделив на ab, получим $\frac{6}{a}+\frac{6}{b}=1$. Положительные числа $\frac{6}{a}$ и $\frac{6}{b}$ не равны $\frac{1}{2}$ (т.к. $a \neq b$), значит, одно из них меньше $\frac{1}{2}$, а другое больше. Пусть $\frac{6}{a}<\frac{1}{2}$, тогда $a > 12$.

3 вариант

7 класс

7.1. В 7а классе по списку 60% девочек. Когда из-за болезни в класс не пришли два мальчика и одна девочка, то девочек присутствовало 62,5%. Сколько в классе по списку девочек и мальчиков?

Ответ: 21 девочка и 14 мальчиков. **Решение**. Пусть по списку в классе d девочек и m мальчиков. Из условий задачи имеем два уравнения: $\frac{d}{d+m}=0{,}6$ и $\frac{d-1}{d+m-3}=0{,}625$. Из первого уравнения $2d=3m$. Подставив $m=\frac{2}{3}d$ во второе уравнение и решив его, получим d = 21, и тогда m = 14.

7.2. Имеется 11кг крупы. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах отмерить 1 кг крупы, если есть одна трехкилограммовая гиря?

Решение. Первое взвешивание: положим на одну чашу весов гирю (3кг), а на другую сначала 11кг крупы, и будем отсыпать крупу на первую чашу до наступления равновесия Получим 3кг (гиря) + 4кг (крупы) = 7кг (крупы) (т.к. $3 + x = 11 - x \Rightarrow x=4$). Второе взвешивание: из полученных 4кг крупы отсыпем 3кг крупы, чтобы уравновесить гирю в 3 кг. Вес оставшейся крупы – 1кг.

7.3. Найдите шестизначное число, которое после умножения на 9 записывается теми же цифрами, что исходное число, но в обратном порядке? Сколько таких шестизначных чисел?

Ответ: 109989 – единственное число. **Решение**. Пусть $\overline{abcdef}$ – искомое число, т.е. $\overline{abcdef}\cdot 9=\overline{fedcba}$. Тогда очевидно a = 1, b = 0 (иначе при умножении на 9 получили бы семизначное число). Поэтому f = 9, а предпоследняя цифра e = 8 (что следует из умножения столбиком). Тогда третья цифра c может быть 8 или 9. Но если c = 8, то d = 1, т.к. сумма цифр делится на 9, однако число 108189 при проверке не подходит. Если же c = 9, то d = 9 и число 109989 – единственное, удовлетворяющее условию, и при проверке оно подходит.

7.4. На ребрах куба в некотором порядке расставили числа 1, 2, ..., 12 и для каждой грани подсчитали сумму четырех чисел на ее ребрах. Докажите, что есть две грани, на одной из которых соответствующая сумма больше 25, а на другой – меньше 27.

Решение. Подсчитаем на каждой грани соответствующую сумму и затем сложим эти суммы для всех шести граней. Получим в результате $(1 + 2 + \ldots + 12)\cdot 2$, так как при таком подсчете любое ребро будет засчитано дважды. Итак, общая сумма 156, и тогда хотя бы для одной грани ее сумма не меньше $\frac{156}{6}=26$. (Действительно, в противном случае мы получили бы общую сумму не больше $25\cdot 6=150<156$). Аналогично, хотя бы для одной грани ее сумма не больше 26 (иначе мы так же получили бы противоречие). Если для всех граней соответствующие суммы совпадают, т.е. равны 26, то искомой парой граней будут любые две. Если же не все суммы одинаковы, то выберем две грани с наименьшей и наибольшей суммой (соответственно).

.