Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
по математике 2020/21 уч.г.
Отборочный тур. ***Продолжительность 90 минут***

Общие критерии оценивания

Каждая из четырёх задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **25**	Полное верное решение
+. **20**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **16**	Решение в целом верное, но содержит мелкие ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$ **13**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **10**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **5**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 13 баллов. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 17 баллам.

1 вариант

11 класс

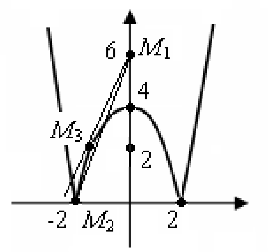
11.1. Решите уравнение $|x^2 - 100| = 10x + 90$.

Ответ. $x_1 = 5 + \sqrt{215}$, $x_2 = -5 + \sqrt{35}$. **Решение.** См. задачу 10.1.

11.2. Дана треугольная пирамида *SABC* со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами *SA*, *SB*, *SC*. Докажите, что $\Delta\, ABC$ остроугольный.

Решение. См. задачу 10.2.

11.3. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $|x^2 - 4| = ax + 6$ имеет четыре различных корня.



Ответ. $-3 < a < -2\sqrt{2}$ или $2\sqrt{2} < a < 3$ **Решение**. Рассмотрим сначала случай $a > 0$. Построим график $y = |x^2 - 4|$ на координатной плоскости и проведем касательную из точки $M_1(0;6)$ к ветви графика, расположенной между точками M_1 и $M_2(-2;0)$. Найдем точку касания $M_3(x_0;y_0)$. Эта точка удовлетворяет уравнению $y = 4 - x^2$, а также уравнению прямой $y - 6 = kx$, где $k = y'(x_0) = -2x_0$, т.е. $y_0 - 6 = (-2x_0)x_0$. Из этих уравнений получаем $y_0 = 2$, $x_0 = -\sqrt{2}$. Прямая $y = ax + 6$ пересекает график $y = |x^2 - 4|$ в четырех точках, когда угловой коэффициент этой прямой находится между угловыми коэффициентами прямых M_1M_2 и M_1M_3, значит,. $\frac{6-2}{\sqrt{2}} < a < \frac{6}{2}$, т.е. $2\sqrt{2} < a < 3$. Аналогично, для отрицательных *a* получим симметричные границы: $-3 < a < -2\sqrt{2}$.

11.4. Существует ли функция *f*, определённая для всех действительных чисел и удовлетворяющая тождествам: $f(2\cos^2 x) = 1 + \cos 4x$ и $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^3 + \frac{1}{x^3}$?

Ответ: существует**. Решение**. Значение $x + \frac{1}{x} \ge 2$ при всех положительных *x* (что следует из неравенства между средними арифметическим и геометрическим). Поэтому $x + \frac{1}{x} \le -2$ при всех отрицательных *x*. Обозначим $t = x + \frac{1}{x}$. Тогда $t^3 = x^3 + \frac{1}{x^3} + 3\left(x + \frac{1}{x}\right)$, т.е. $x^3 + \frac{1}{x^3} = t^3 - 3t$. Далее, преобразуем $1 + \cos 4x = 2\cos^2 2x = 2(2\cos^2 x - 1)^2 = 2(t-1)^2$, где $t = 2\cos^2 x \in [0,2]$. Рассмотрим функцию $f(t) = \begin{cases} t^3 - 3t, & \text{если } |t| \ge 2, \\ 2(t-1)^2, & \text{если } -2 < t \le 2 \end{cases}$ В общей точке $t = 2$ областей определения верхней и нижней формулы значения совпадают (и равны 2), поэтому данная функция корректно определена и удовлетворяет условиям задачи.

2 вариант

11 класс

11.1. Найдите наибольший член последовательности **а)** $a_n = \dfrac{n}{n^2+2020}$, **б)** $a_n = \dfrac{2020^n}{n!}$

(где n!=$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$).

Ответ. **а**) $a_{45} = \dfrac{45}{4045}$, **б**) $a_{2019} = a_{2020} = \dfrac{2020^{2019}}{2019!}$. **Решение. а**) Исследуем неравенство $a_n < a_{n+1}$, т.е. $a_n = \dfrac{n}{n^2+2020} < \dfrac{n+1}{(n+1)^2+2020} = a_{n+1}$. Преобразуя его, получим $n^2 + n < 2020$. Это неравенство выполняется, как легко проверить, при n=44 и не выполняется при n=45. В силу монотонного возрастания функции $f(n)=n^2 + n$ (при положительных n), a_{45} – это наибольший член последовательности. *Замечание.* Другой способ решения состоит в исследовании формулы общего члена с помощью производной. Для найденной точки максимума x надо сравнить значение функции в двух целых точках, ближайших к x слева и справа. **б**) Аналогично сравнивая выражения для a_n и a_{n+1} и сокращая неравенство на $\dfrac{2020^n}{n!}$, получаем $n+1<2020$. Значит, a_n возрастает при $n<2019$; значения a_{2019} и a_{2020} совпадают, а при $n \geq 2020$ последовательность a_n убывает.

11.2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $5 + \cos 2x = 4a + 4a\sin x$ имеет решение.

Ответ. $a \geq 0.5$. **Решение**. Введя новую переменную $t = \sin x$ (где $|t| \leq 1$) и применяя формулу для косинуса двойного угла, получим уравнение $t^2 + 2at + 2a - 3 = 0$. Требуется найти параметры a, для которых это уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [– 1; 1]. Обозначим квадратный трехчлен в левой части данного уравнения через $f(t)$. Значение $f(-1) = 1 - 2a + 2a - 3 = -2 < 0$ при всех a. Поэтому то условие, что на отрезке [– 1; 1] находится корень квадратного трехчлена $f(t)$, равносильно неравенству $f(1) \geq 0$ (поскольку ветви $f(t)$ направлены вверх). Таким образом, $f(1) = 1 + 2a + 2a - 3 = 4a - 2 \geq 0$, т.е. $a \geq 0.5$.

11.3. Существует ли иррациональное число $x \in [0.3; 0.4]$, такое что $x(x+1)(x+2)$ – целое число?

Ответ. Существует. См. задачу 10.3.

11.4. Докажите, что для любого остроугольного треугольника ABC можно построить треугольную пирамиду $SABC$ со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами SA, SB, SC.

Решение См. задачу 10.4.

3 вариант

11 класс

11.1. Найдите множество значений функции $y = |2\sin x + 3\cos x + 4|$.

Ответ: $[4-\sqrt{13},\ 4+\sqrt{13}]$. **Решение.** Преобразовав $2\sin x + 3\cos x$ с помощью дополнительного угла α, получим $2\sin x + 3\cos x + 4 = \sqrt{13}\sin(x+\alpha)+4$. Наибольшее значение этого выражения $4+\sqrt{13}$, а наименьшее $4-\sqrt{13} > 0$. Отсюда следует результат.

11.2. На шахматную доску поставили 8 ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что в любом клетчатом прямоугольнике размера 4×5 (клеток) есть хотя бы одна ладья.

Решение. См. задачу 10.2

11.3. У прямоугольного треугольника ABC длина гипотенузы AB и катета AC удовлетворяют неравенствам $100<AB<101$ и $99<AC<100$. Докажите, что ΔABC можно разбить на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона длины 1, причем существует разбиение, в котором таких треугольников не больше 21.

Решение. См. задачу 10.4.

11.4. У многочлена $P(x)$ (отличного от константы) все коэффициенты неотрицательны. Может ли $P(x)$ делиться на многочлен, у которого старший коэффициент положительный, а свободный член отрицательный?

Ответ: нет, не может. **Решение**. Пусть $P(x)$ делится на $Q(x)=ax^k+\ ...\ +b$, где $a>0$, $b<0$. Тогда $Q(x)$ имеет положительный корень. Действительно, $Q(0)=b<0$ и $Q(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$, поэтому график непрерывной функции $y=Q(x)$ должен пересекать положительную полуось Ox. Значит, $P(x)$ имеет тот же самый положительный корень, но это невозможно, т.к. коэффициенты $P(x)$ неотрицательны, а старший коэффициент положителен.