Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика. 2020-2021 учебный год
Финальный тур. *Продолжительность 180 минут.*

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
$+$ **20**	Полное верное решение
$+.$ **16**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$ **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-.$ **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
$-$ **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах») при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

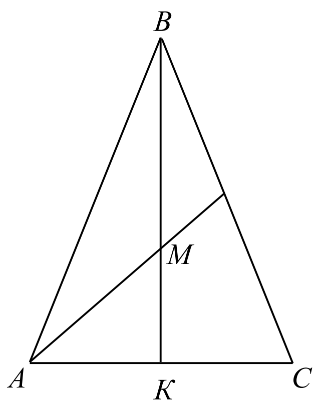
11 класс

11.1. Решите уравнение $(x^4+x+1)(\sqrt[3]{80}-\sqrt[3]{0{,}01})=2(\sqrt[3]{5{,}12}+\sqrt[3]{0{,}03375})$.

Ответ: $x_1=0$, $x_2=-1$. Решение. См. задачу 10.1.

11.2. Дан равнобедренный треугольник *ABC* с основанием *AC*. Пусть *M* – точка пересечения медиан. Докажите, что $\angle BAM<2\angle MAC$.

Решение. Пусть *BK* – медиана равнобедренного треугольника *ABC*, проведенная к основанию *AC*, тогда $BK\perp AC$ по свойству равнобедренного треугольника. По свойству точки пересечения медиан, $BK{:}MK=3{:}1$. Обозначим, $\angle MAK=\alpha$, $\angle BAK=\beta$, Тогда неравенство $\angle BAM<2\angle MAC$ равносильно неравенству $\beta<3\alpha$. Последнее неравенство очевидно в случае, когда $\alpha\ge\frac{\pi}{6}$, т.к. $\beta<\frac{\pi}{2}$. Пусть теперь $\alpha<\frac{\pi}{6}$. Из прямоугольных треугольников *ABK* и *AMK* имеем: $\mathrm{tg}\beta=\frac{BK}{AK}$, $\mathrm{tg}\alpha=\frac{MK}{AK}$, значит, $\mathrm{tg}\beta=3\mathrm{tg}\alpha$. Так как углы β и 3α лежат в интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, то неравенство $\beta<3\alpha$ равносильно неравенству $\mathrm{tg}\beta<\mathrm{tg}3\alpha$, т.е. $3\mathrm{tg}\alpha<\mathrm{tg}3\alpha$. Рассмотрим разность



$$\mathrm{tg}3\alpha-3\mathrm{tg}\alpha=(\mathrm{tg}3\alpha-\mathrm{tg}\alpha)-2\mathrm{tg}\alpha=\frac{\sin2\alpha}{\cos3\alpha\cdot\cos\alpha}-\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha}{\cos3\alpha}-\frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Так как $0<\alpha<\frac{\pi}{6}$, то $0<\cos3\alpha<\cos\alpha$ и $\sin\alpha>0$, и значит, $2\sin\alpha(\frac{1}{\cos3\alpha}-\frac{1}{\cos\alpha})>0$, следовательно, $\mathrm{tg}3\alpha-3\mathrm{tg}\alpha>0$.

11.3 Последовательность целых чисел a_n задается следующим образом: $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$, $a_1=100$. Докажите, что любые два различных члена последовательности взаимно просты.

Решение. См. задачу 10.4.

11.4. У Пети скопилось много кусочков пластилина трех цветов, и он плотно заполнил пластилином полый куб со стороной 5 см, так что в кубе не осталось свободного места. Докажите, что внутри куба найдутся две точки одного цвета на расстоянии ровно 7 см друг от друга.

Решение. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рассмотрим 4 вершины A, C, B_1, D_1. Они являются вершинами правильного тетраэдра со стороной $a\sqrt{2}$, где $a=5$ – ребро куба. Поскольку $5\sqrt{2}>7$, рассмотрим подобный тетраэдр с коэффициентом подобия $k=\frac{7}{5\sqrt{2}}$, т.е. проделаем гомотетию с центром в центре куба и данным коэффициентом подобия. Получим четыре вершины нового тетраэдра внутри куба. Поскольку цветов у пластилина три, хотя бы две вершины этого тетраэдра будут одного цвета.

11.5. Существует ли такой многочлен десятой степени, принимающий целые значения при всех целых аргументах, у которого старший коэффициент не превосходит по абсолютной величине 10^{-6}?

Ответ. Существует. **Решение.** Примером такого многочлена, является $P(x)=\frac{1}{10!}x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-9)$. Покажем, что этот многочлен удовлетворяет условию задачи. Его старший коэффициент равен 1/(10!). Проверим, что $1/(10!)<10^{-6}$, т.е. $9!>10^5$. Действительно, $9!=2^7\cdot3^4\cdot5\cdot7=2^5\cdot6\cdot6\cdot5\cdot7\cdot9>2^5\cdot5^5=10^5$. Для того, чтобы доказать тот факт, что этот многочлен принимает целочисленные значения при всех целых *x*, заметим, что при всех натуральных $x\ge10$ число $\frac{1}{10!}x(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-9)$ есть не что иное, как C_x^{10}, т.е. число сочетаний из x по 10 (или 10-й биномиальный коэффициент в биноме Ньютона $(a+b)^x$) и значит, это число натуральное. При неотрицательных целых $x\le9$, очевидно, $P(0)=P(1)=\ldots=P(9)=0$, а при отрицательных целых $x=-n$ легко проверить, что $P(-n)=P(n+9)$ и поэтому это тоже целое (даже натуральное) число.