Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
по математике 2020/21 уч.г.
Отборочный тур. *Продолжительность 90 минут*

Общие критерии оценивания

Каждая из четырёх задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 25 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
$+$ **25**	Полное верное решение
$+.$ **20**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
$\pm$ **16**	Решение в целом верное, но содержит мелкие ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$ **13**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
$\mp$ **10**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
$-.$ **5**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
$-$ **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 13 баллов. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 17 баллам.

1 вариант

10 класс

10.1. Решите уравнение $|x^2 - 100| = 10x + 90$.

Ответ. $x_1 = 5 + \sqrt{215},\ x_2 = -5 + \sqrt{35}$. **Решение**. Если $x^2 - 100 \ge 0$, т.е. при условии $|x| \ge 10$, имеем уравнение $x^2 - 10x - 190 = 0$, $x = 5 \pm \sqrt{215}$. Корень $5 + \sqrt{215}$ удовлетворяет условию $|x| \ge 10$, а корень $5 - \sqrt{215}$ – нет. Если $|x| < 10$, то имеем уравнение $x^2 + 10x - 10 = 0$, $x = -5 \pm \sqrt{35}$, и условию $|x| < 10$ удовлетворяет только корень $x = -5 + \sqrt{35}$.

10.2. Дана треугольная пирамида *SABC* со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами *SA*, *SB*, *SC*. Докажите, что $\Delta\, ABC$ остроугольный.

Решение. Обозначим длины боковых ребер через *a*, *b*, *c*. Тогда квадраты сторон ΔABC по теореме Пифагора равны $a^2 + b^2$, $b^2 + c^2$, $a^2 + c^2$. Поэтому сумма квадратов любых двух сторон основания больше квадрата третьей стороны, а это означает, что ΔABC – остроугольный

10.3. Даны два положительных числа. Известно, что их сумма, а также сумма их кубов – числа рациональные. Можно ли утверждать, что **а)** сами числа рациональные? **б)** сумма их квадратов – число рациональное?

Ответ. **а)** Нет. **б)** Да, можно. **Решение.** См. задачу 9.3.

10.4. Внутри треугольника *ABC* взяли произвольную точку *M*. Через вершины треугольника и эту точку провели три отрезка до пересечения с противоположными сторонами. Докажите, что среди этих отрезков можно выбрать два таких, что точка *M* делит один из них (считая от вершины) в отношении ≥ 2, а другой – в отношении ≤ 2.

Решение. См. задачу 9.4.

2 вариант

10 класс

10.1. Изобразите на координатной плоскости множество решений системы уравнений $\begin{cases} x-2y=1 \\ x^3-8y^3-6xy=1. \end{cases}$

Ответ. Множество решений системы это прямая $y=\dfrac{x-1}{2}$. **Решение.** Второе уравнение есть следствие первого, так как

$$x^3-8y^3-6xy=(x-2y)\left(x^2+2xy+4y^2\right)-6xy=$$
$$=x^2+2xy+4y^2-6xy=(x-2y)^2=1.$$

Поэтому система двух уравнений равносильна одному первому уравнению.

10.2. Сколько решений в целых числах *x*, *y* имеет неравенство $|y-x|+|3x-2y|\le a$ **а**) при *a*=2; **б**) при *a*=20 ?

Ответ: **а) 13**; **б) 841**. **Решение.** См. задачу 9.3.

10.3. Существует ли иррациональное число $x\in[0.3;0.4]$, такое что $x(x+1)(x+2)$ – целое число?

Ответ. Существует. **Решение.** Обозначим $P(x)=x(x+1)(x+2)-1$ и рассмотрим уравнение $P(x)=0$. Поскольку $P(0.3)=-0.103$, а $P(0.4)=0.344$ – значения разных знаков, то на интервале $(0.3;0.4)$ это уравнение имеет корень. Обозначим его через x_0 и покажем, что x_0 – иррациональное число. В противном случае $x_0=\dfrac{p}{q}$, где *p*, *q* – взаимно простые натуральные числа, и тогда $p(p+q)(p+2q)=q^3$. Если $q\neq 1$, то из взаимной простоты *p* и *q* следует, что в левой части все множители взаимно просты с *q* и значит, их произведение не может делиться на *q* (и тем более на q^3). Если $q=1$, то очевидно, что уравнение $p(p+q)(p+2q)=1$ не имеет натуральных решений (левая часть больше правой).

10.4. Докажите, что для любого остроугольного треугольника *ABC* можно построить треугольную пирамиду *SABC* со взаимно перпендикулярными боковыми ребрами *SA*, *SB*, *SC*.

Решение. Пусть $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$. Покажем, что в пространстве с прямоугольной системой координат можно отметить на координатных осях точки $A'(x,0,0)$, $B'(0,y,0)$ и $C'(0,0,z)$ так, чтобы $A'B'=AB$, $B'C'=BC$ и $A'C'=AC$. Действительно, имеем систему трех уравнений $x^2+y^2=c^2$, $y^2+z^2=a^2$, $x^2+z^2=b^2$. Ее решение $x^2=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2}$, $y^2=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2}$, $z^2=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2}$ существует, т.к. ΔABC – остроугольный и значит, $b^2+c^2>a^2, a^2+c^2>b^2, a^2+b^2>c^2$. Тем самым, мы построили пирамиду $OA'B'C'$ (где *O* – начало координат), равную искомой. Осталось переместить в пространстве эту пирамиду так, чтобы треугольник $A'B'C'$ совпал с треугольником *ABC* , при этом вершина *O* попадёт в искомую вершину *S*.

3 вариант

10 класс

10.1. В трапеции $ABCD$ точка N – середина боковой стороны CD. Оказалось, что $\angle ANB = 90^0$. Докажите, что AN и BN – биссектрисы углов A и B соответственно.

Ответ. См. задачу 9.2.

10.2. На шахматную доску поставили 8 ладей, которые не бьют друг друга. Докажите, что в любом клетчатом прямоугольнике размера 4×5 (клеток) есть хотя бы одна ладья.

Решение. Предположим противное, и пусть, для определенности, прямоугольник расположен в пяти горизонталях и четырех вертикалях. Тогда любая ладья находится среди остальных трех горизонталей или среди остальных четырех вертикалей (или одновременно, т.е. на их пересечении). Но в трех горизонталях стоит не более трех ладей, а в четырех вертикалях – не более четырех. Значит, всего в этих горизонталях и вертикалях стоит не более семи ладей (точнее, количество ладей равно 7 минус количество ладей на пересечениях данных горизонталей и вертикалей). Получили противоречие, т.к. ладей всего 8.

10.3. Найдите все такие квадратные трехчлены $P(x)=x^2+bx+c$, что $P(x)$ имеет целые корни, а сумма его коэффициентов (т.е. $1+b+c$) равна 10.

Ответ. $(x-2)(x-11)$, $(x-3)(x-6)$, $x(x+9)$, $(x+4)(x+1)$. **Решение**. См. задачу 9.3.

10.4. У прямоугольного треугольника ABC длина гипотенузы AB и катета AC удовлетворяют неравенствам $100<AB<101$ и $99<AC<100$. Докажите, что ΔABC можно разбить на несколько треугольников, в каждом из которых есть сторона длины 1, причем существует разбиение, в котором таких треугольников не больше 21.

Решение. По теореме Пифагора $CB = \sqrt{AB^2 - AC^2} < \sqrt{101^2 - 99^2} = 20$. Отложим от точки B вдоль катета CB последовательно единичные отрезки $1=BK_1 = K_1K_2 = \ldots = K_{n-1}K_n$ так, что $CK_n<1$ (где n равно целой части длины CB, т.е. $n < 20$). Если длина CB – целое число, то K_n совпадает с C и тогда соединив A с точками $K_1, K_2 \ldots K_n$ получим всего n искомых треугольников. Если же $0<CK_n<1$, то проведем единичную окружность с центром в C. Поскольку K_n лежит внутри, а A – вне этой окружности, то она пересекает отрезок AK_n в некоторой точке M. Тогда к указанным n треугольникам добавляем еще два: ΔACM и ΔK_nCM со стороной $CM=1$.