Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки»
Математика. 2020-2021 учебный год
Финальный тур. *Продолжительность 180 минут.*

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **20**	Полное верное решение
+. **16**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+/2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах») при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

10 класс

10.1. Решите уравнение $(x^4+x+1)(\sqrt[3]{80}-\sqrt[3]{0{,}01})=2(\sqrt[3]{5{,}12}+\sqrt[3]{0{,}03375})$.

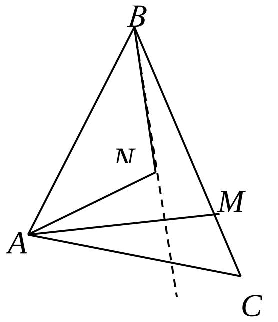
Ответ: $x_1=0$, $x_2=-1$. **Решение**. Умножим обе части уравнения на $\sqrt[3]{100}$, получим $(x^4+x+1)(\sqrt[3]{8000}-\sqrt[3]{1})=2(\sqrt[3]{512}+\sqrt[3]{3{,}375})\Leftrightarrow 19\cdot(x^4+x+1)=2(8+1{,}5)\Leftrightarrow x^4+x+1=1\Leftrightarrow$ $x(x^3+1)=0.$ Таким образом, $x_1=0$, $x_2=-1$.

10.2. Сколько существует прямоугольных треугольников с целочисленными сторонами, у которых один из катетов равен 2021?

Ответ: 4. Решение. См. задачу 9.3.

10.3. На стороне BC треугольника ABC взята точка M такая, что $\angle BAM=\angle BCA$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, лежит на прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной AM.

Решение. На прямой, проходящей через точку B и перпендикулярной прямой AM, возьмем такую точку N, что $AN=BN$ (она лежит на серединном перпендикуляре к AB). Тогда



$\angle NAB=\angle ABN=90^\circ-\angle MAB$, поэтому

$\angle ANB=180^\circ-2\angle NAB=2(90^\circ-\angle ABN)=2\angle MAB=2\angle ACB$. Отсюда следует, что точка C лежит на окружности, проходящей через A и B, с центром в точке N: действительно, для этой окружности $\angle ANB$ – центральный, а $\angle ACB$ – вписанный (если бы точка C лежала вне этой окружности, то $\angle ACB$ был бы меньше половины центрального, а если бы точка С была внутри окружности, то $\angle ACB$ был бы больше половины центрального).

10.4. Последовательность целых чисел a_n задается следующим образом: $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$, $a_1=100$. Докажите, что любые два различных члена последовательности взаимно просты.

Решение. Пусть a_n и a_{n+m} – два произвольных члена последовательности ($m>0$). Докажем, что a_{n+m} можно представить в виде $a_{n+m}=a_n\cdot P_m(a_n)+1$, где $P_m(x)$ – многочлен с целыми коэффициентами. Мы докажем этот факт по индукции. Для $m=1$ имеем $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1=a_n\cdot(a_n-1)+1$, т.е. $P_1(a_n)=a_n-1$. Для $m=2$ получим $a_{n+2}=a_{n+1}\cdot(a_{n+1}-1)+1=(a_n^2-a_n+1)\cdot a_n\cdot(a_n-1)+1$, т.е. $P_2(a_n)=(a_n-1)\cdot(a_n^2-a_n+1)$. Пусть $a_{n+k}=a_n\cdot P_k(a_n)+1$ при $m=k$, тогда при $m=k+1$ будем иметь

$a_{n+k+1}=a_{n+k}\cdot(a_{n+k}-1)+1=(a_n\cdot P_k(a_n)+1)\cdot a_n\cdot P_k(a_n)+1$, и значит, многочлен $P_{k+1}(a_n)$ имеет вид $P_{k+1}(a_n)=(a_n\cdot P_k(a_n)+1)\cdot P_k(a_n)$ и поэтому его коэффициенты целые. Найдем наибольший общий делитель a_n и $a_{n+m}=a_nP_m(a_n)+1$. Из последнего соотношения следует, что если НОД $(a_n, a_{n+m})=d$, то и 1 делится на d и следовательно, $d=1$, то есть a_n и a_{n+m} взаимно просты.

10.5. Дано 10 чисел: 10, 20, 30,..., 100. С ними можно проделать следующую операцию: выбрать любые три и прибавить к выбранным числам по единице. С полученными 10 числами проделывается та же операция и т.д. Можно ли в результате нескольких операций получить: **а**) все одинаковые числа? **б**) все числа, равные 200?

Ответ: а) можно, **б)** нельзя. **Решение.** См. задачу 9.5.