11 класс

11.1. Решите уравнение $\cos^2(\sqrt{2}x) - \sin^2 x = 1$.

Ответ: . $x = 0$. **Решение**. Левая часть уравнения не превосходит единицы, причем она может равняться единице лишь при условии одновременного выполнения двух равенств: $\cos^2(\sqrt{2}x) = 1$ и $\sin x = 0$. Отсюда $\sqrt{2}x = \pi n$ и $x = \pi k$, $k, n \in \mathbf{Z}$. Тогда $\frac{\pi n}{\sqrt{2}} = \pi k$, т.е. $n = \sqrt{2}k$ при некоторых целых n, k. Поскольку $\sqrt{2}$ – иррациональное число, то из последнего равенства следует, что k обязано равняться нулю. Значит, $k = n = 0$.и $x = 0$.

.

11.2. Найдите все значения параметра a, для которых уравнение $\sqrt{x^2 - 2x - 3}(x^2 - 3ax + 2a^2) = 0$ имеет ровно три корня.

Ответ: $-1 \le a < -\frac{1}{2}$ или $\frac{3}{2} < a \le 3$. **Решение**. См. задачу 10.2.

11.3. Биссектриса BK треугольника ABC в точке I пересечения биссектрис делится в отношении $BI : IK = 10 : 7$. Докажите, что угол B острый.

Решение. См. задачу 10.3.

11.4. n векторов в пространстве таковы, что любая пара из них образует тупой угол. Какое наибольшее значение может принимать n?

Ответ: 4. **Решение**. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.– данные векторы. Направим ось z координатного пространства вдоль $\vec{a}_n$. Тогда z-координата остальных векторов должна быть отрицательна (это следует из формулы для косинуса угла между векторами через скалярное произведение векторов). Пусть $\vec{a}_1 = (x_1, y_1, z_1), ..., \vec{a}_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ – координаты векторов и пусть двумерные векторы $\vec{b}_1 = (x_1, y_1), ..., \vec{b}_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})$ – это проекции данных векторов на плоскость xOy. Тогда угол между любой парой векторов $\vec{b}_i$ и $\vec{b}_j$ тупой: действительно, $\cos\left(\vec{b}_i \wedge \vec{b}_j\right) = \frac{x_i x_j + y_i y_j}{|\vec{b}_i| \cdot |\vec{b}_j|} < 0$, т.к. $x_i x_j + y_i y_j < x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j < 0$ (в первом из данных неравенств использовано то, что z_i и z_j отрицательны, а во втором – то, что угол между $\vec{a}_i$ и $\vec{a}_j$ тупой). Итак, на плоскости xOy векторы $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_{n-1}$ обладают тем же свойством, а именно: угол между любой парой из них тупой. Поэтому $n - 1 \le 3$ (это легко показать, если, отложив векторы из одной точки, сложить соседние углы по кругу, т.к. в сумме они дают 360°). Таким образом, получаем оценку $n \le 4$. Пример для четырех векторов можно привести такой: $\vec{a}_1 = (1,0,-\varepsilon), \vec{a}_2 = \left(\cos\frac{2\pi}{3}, \sin\frac{2\pi}{3}, -\varepsilon\right), \vec{a}_3 = \left(\cos\frac{4\pi}{3}, \sin\frac{4\pi}{3}, -\varepsilon\right), \vec{a}_4 = (0,0,1)$, где ε – достаточно малое положительное число, можно взять $\varepsilon = 0.1$.

----

11 класс

11.1. Решите уравнение $(\sin 2x - \pi \sin x)\sqrt{11x^2 - x^4 - 10} = 0$.

Ответ: $x \in \{-\sqrt{10}, -\pi, -1, 1, \pi, \sqrt{10}\}$. **Решение.** Найдем область определения. Имеем $11x^2 - x^4 - 10 \ge 0 \Leftrightarrow (x^2 - 10)(x^2 - 1) \le 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10} \le x \le -1$ или $1 \le x \le \sqrt{10}$. При этом получаем четыре значения $x \in \{-\sqrt{10}, -1, 1, \sqrt{10}\}$, для которых подкоренное выражение обращается в нуль. Первый множитель уравнения $\sin 2x - \pi \sin x = 2\sin x\left(\cos x - \frac{\pi}{2}\right)$ обращается в нуль только при условии $\sin x = 0$ (т.к. $\pi/2 > 1$). Таким образом, $x = k\pi$ $(k \in Z)$, но в область определения попадают лишь два значения, а именно $\pm\pi$ из указанной серии (неравенство $\pi < \sqrt{10}$ следует из неравенств $\pi < 3{,}15$ и $(3{,}15)^2 < 10$).

11.2. Дан прямоугольник с целочисленными координатами вершин на координатной плоскости. Пусть α – угол между его диагоналями. Обязательно ли рациональным числом является **а)** $\cos\alpha$?; **б)** $\sin\alpha$?

Ответ: а) да; **б)** да. **Решение**. **а)** Пусть ***ABCD*** – данный прямоугольник и O – его центр. Тогда $\alpha = \angle COD$, $\frac{\alpha}{2} = \angle CAD$. Поскольку $\cos^2\frac{\alpha}{2} = (AD)^2/(AC)^2$ – число рациональное, то $\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$ – тоже рациональное число. **б)** Заметим, что $\mathrm{tg}\alpha$ – число рациональное, т.к. α – это угол между прямыми с рациональными угловыми коэффициентами –, скажем, k_1 и k_2, и $\mathrm{tg}\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$. Поэтому и $\sin\alpha = \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\alpha$ – число рациональное..

11.3. Существует ли такое натуральное *n*, что число $n^2 + 6n + 2019$ делится на 100?

Ответ: не существует. **Решение**. См. задачу 10.3

11.4. Даны треугольник и четырехугольник, про которые известно следующее: для любых двух углов треугольника найдется угол в четырехугольнике, по величине равный сумме этих двух углов треугольника. Докажите, что треугольник равнобедренный.

Решение. См. задачу 10.4.