Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур. 2019

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **20**	Полное верное решение
+. **16**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
+/2 **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

9 класс

9.1. Может ли длина одной из медиан прямоугольного треугольника составлять **а**) 51% от длины гипотенузы? **б**) 49% от длины гипотенузы?

<u>Ответ.</u> а) Может; **б**) не может. **<u>Решение.</u>** Ясно, что медиана проведена к середине одного из катетов, иначе ее длина была бы равна половине гипотенузы. Пусть $\Delta\,ABC$ прямоугольный с прямым углом C и $BC = a$, $AC = b$. Без ограничения общности можно считать, что медиана AM проведена к середине M катета CB. Пусть $k = AM/AB$. Тогда имеем $k\cdot\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{b^2+\frac{a^2}{4}}$, т.е. $(4k^2-1)a^2 = 4(1-k^2)b^2$. Если $\frac{1}{2} < k < 1$, то отсюда получим искомое отношение катетов. Если же $0 < k < \frac{1}{2}$, то в полученном соотношение правая и левая части разных знаков.

9.2. Из пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. Они ехали с постоянными скоростями. С момента встречи первый велосипедист ехал до пункта B 40 минут, а второй до пункта A – полтора часа. Найдите время от начала движения до встречи и отношение скоростей велосипедистов.

Ответ: Время до встречи – 1 час. Скорость первого велосипедиста больше скорости второго в 1,5 раза. **<u>Решение</u>**. См. задачу 8.3

9.3. Вписанная окружность треугольника ABC с центром O касается сторон AB, BC и AC в точках M, N и K соответственно. Оказалось, что угол AOC в четыре раза больше угла MKN. Найдите угол B.

,

Ответ: 108°. **Решение**. Пусть $\angle A=\alpha,\ \angle B=\beta,\ \angle C=\gamma$. Тогда в равнобедренном треугольнике AKM угол при основании равен $\angle AKM=(180°-\alpha)/2$. Аналогично в треугольнике CKN находим $\angle CKN=(180°-\gamma)/2$. Поэтому $\angle MKN=180°-\angle CKN-\angle AKM=(\alpha+\gamma)/2=(180°-\beta)/2=$ $=90°-\dfrac{\beta}{2}$. Далее, $\angle AOC=180°-\dfrac{\alpha}{2}-\dfrac{\gamma}{2}=180°-(180°-\beta)/2=90°+\dfrac{\beta}{2}$. Таким образом, из условия задачи имеем $90°+\dfrac{\beta}{2}=4\left(90°-\dfrac{\beta}{2}\right)\Leftrightarrow\beta=\dfrac{540°}{5}=108°$.

9.4 За круглым столом сидят 20 акционеров. Какое минимальное значение может иметь суммарное количество их акций, если известно, что **а**) у любых трех из них в сумме больше 1000 акций, **б**) у любых трех подряд сидящих акционеров в сумме больше 1000 акций?

Ответ: **а**) 6679; **б**) 6674. **Решение**. **а)** Пусть x_i – число акций у i-го акционера (если считать по кругу, начиная с некоторого акционера). Упорядочим числа x_i по возрастанию, получим: $y_1 \le y_2 \le y_3 \le \ldots \le y_{20}$. Заметим, что $y_3 \ge 334$, так как в противном случае сумма $y_1 + y_2 + y_3$ была бы ≤ 999. Поэтому для суммы S всех акций имеем: $S \ge (y_1 + y_2 + y_3) + 334 \cdot 17 \ge 1001 + 334 \cdot 17 = 6679$. Это значение реализуется, когда у одного акционера 333, а у всех остальных – по 334 акции. **б**) Записав неравенства вида $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \ge 1001$ для всех i (считая, что $x_{21} = x_1$, $x_{22} = x_2$) и сложив все 20 неравенств, получим $3S \ge 1001 \cdot 20$. Значит, $S \ge 6673{,}333\ldots$ т.е. $S \ge 6674$. Это значение реализуется, когда числа $x_1, x_2, x_3,\ldots, x_{19}, x_{20}$ равны 333, 334, 334,…(повторяется 6 раз такая тройка) и последние два числа 334, 334**.**

9.5. Дан неравносторонний треугольник со сторонами a, b, c. Если существует треугольник со сторонами $a + b - c$, $b + c - a$, $a + c - b$, то рассматривают этот новый треугольник и с ним проделывают ту же процедуру (и т.д.), в противном случае процесс заканчивается. **а**) Может ли в этом процессе встретиться треугольник, подобный исходному? **б)** Может ли этот процесс продолжаться бесконечно?

Ответ: **а**) нет; **б**) нет. **Решение**. **а**) Пусть для определенности, $a \le b \le c$, тогда три новых числа, очевидно, будут удовлетворять неравенствам $a + b - c \le a + c - b \le b + c - a$. Поэтому величина $\Delta= c - a$, равная разности между наибольшей и наименьшей стороной, после одной процедуры будет равна $\Delta_1 = 2(c-a)$, а после n-ой процедуры будет $\Delta_n = 2^n(c-a)$.Значит, если бы на n-ом шаге треугольник оказался подобен исходному, то коэффициент подобия был бы равен 2^n, но, с другой стороны, большая сторона за каждый шаг увеличивается менее, чем в два раза: действительно, в противном случае получили бы неравенство $b+c-a \ge 2c \Leftrightarrow c \le b-a$, что противоречило бы условию на длины сторон. **б**) Заметим, что периметр треугольника сохраняется при данной процедуре, а поскольку величина Δ_n растет как геометрическая прогрессия со знаменателем 2, она станет больше периметра, но это, очевидно, противоречит положительности всех трех сторон треугольника. *Комментарий.* Рассуждение пункта **б**), основанное на сохранении периметра, могло быть применено и в пункте **а**): тогда из подобия треугольников следовало бы их равенство.

,