Математическая олимпиада
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур. 2019

Общие критерии оценивания

Каждая из пяти задач данной олимпиады оценивается, исходя из максимума в 20 баллов. Таким образом, максимальный результат участника может быть 100 баллов. Соответствие правильности решения и выставляемых баллов приведено в таблице.

Символы-Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
+ **20**	Полное верное решение
+. **16**	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
± **12**	Решение в целом верное, но содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
$+\!\!/\!_2$ **10**	Верно рассмотрен один (более сложный) из существенных случаев, верно получена основная оценка.
∓ **8**	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
−. **4**	Рассмотрены только отдельные важные случаи или имеются начальные продвижения.
− **0**	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0 **0**	Решение отсутствует (участник не приступал)

Если в задаче два пункта, то только за один решенный пункт максимальная оценка 10 баллов, а другие (промежуточные) оценки соответствуют половинкам баллов приведенной таблицы. Рекомендуется сначала оценивать задачу в символах («плюс-минусах»); при необходимости оценку в символах можно дополнить значком–стрелкой вверх или вниз, что скорректирует соответствующую оценку на один балл. Например, символ $\pm\uparrow$ будет соответствовать 13 баллам.

7 класс

7.1. Дан квадрат и прямоугольник. Большая сторона прямоугольника на 11% больше стороны квадрата, а меньшая сторона – на 10% меньше стороны квадрата. **а**) Больше или меньше площадь прямоугольника по сравнению с площадью квадрата, и на сколько процентов? **б**) Ответьте на те же вопросы относительно периметров прямоугольника и квадрата.

<u>**Ответ**</u>: **а**) площадь прямоугольника меньше на 0,1%, **б**) периметр прямоугольника больше на 0,5%.
Решение. Пусть a – сторона квадрата, тогда стороны прямоугольника равны $1{,}11a$ и $0{,}9a$. Площадь и периметр прямоугольника равны соответственно $1{,}11\cdot 0{,}9a^2 = 0{,}999a^2$ и $2(1{,}11+0{,}9)a = 4{,}02a$. В процентном отношении площадь прямоугольника составляет $0{,}999a^2/a^2 = 99{,}9\%$, а периметр $4{,}02a/4a = 1{,}005 = 100{,}5\%$. Таким образом, площадь прямоугольника меньше площади квадрата на 0,1%, а периметр больше периметра квадрата на 0,5%.

7.2. Агент 007 хочет зашифровать свой номер с помощью двух натуральных чисел m и n так, чтобы $0{,}07 = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$. Сможет ли он это сделать?

<u>**Ответ**</u>: сможет. **Решение** следует из равенства**:** $0{,}07 = 0{,}05 + 0{,}02 = \frac{1}{20} + \frac{1}{50}$.

7.3. На острове, где живут рыцари и лжецы, несколько (больше двух) человек, собрались за круглым столом. Известно, что за столом были и рыцари и лжецы, и каждый сказал такую фразу: «Только

,

один из двух моих соседей рыцарь». Кого за столом больше: рыцарей или лжецов, и во сколько раз? (Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут; и все знают, кто есть кто).

<u>Ответ</u>: рыцарей больше в два раза. **Решение.** Рассмотрим произвольного рыцаря (по условию задачи, за столом есть рыцари). Из его правдивых слов следует, что с одной стороны от него сидит рыцарь, а с другой лжец. Без ограничения общности можно считать, что рыцарь сидит справа от него, а лжец слева. Тогда от этого соседа-рыцаря слева сидит наш первый рыцарь, значит справа от него сидит лжец. Если бы справа от этого лжеца сидел другой лжец, то фраза о только одном соседе-рыцаре была бы правдивой, и поэтому справа от лжеца должен сидеть рыцарь. Рассуждая аналогично, получаем цепочку «рыцарь-рыцарь-лжец-рыцарь-рыцарь-лжец…» и так далее. Поскольку мы могли начать рассуждения с любого рыцаря, такая периодичность должна наблюдаться на всем круглом столе (и дойти до первого рыцаря с другой стороны). Таким образом, число людей за столом делится на три и рыцарей вдвое больше, чем лжецов.

7.4. На доске было записано 10 чисел. За одну операцию разрешается стереть с доски любые два числа a, b, а вместо них записать $a + 2b$ и $b + 2a$. Может ли получиться так, что в результате нескольких операций все числа на доске окажутся одинаковыми, если вначале были записаны **а**) числа 1, 2, …, 10; **б**) произвольные 10 различных чисел (не обязательно целых)?

<u>Ответ</u>. а) Не может; **б**) может. **Решение**. **а**) Заметим, что при любой операции четность чисел не меняется (т.к. $a + 2b$ имеет ту же четность, что a, и аналогично, $b + 2a$ имеет ту же четность, что b). Вначале было 5 четных и 5 нечетных чисел, поэтому и в конце должно быть 5 четных и 5 нечетных чисел, поэтому 10 чисел одинаковой четности не могло получиться. **б**) Приведём пример: пусть вначале на доске написаны такие 10 чисел $-25;\ 53;\ -21;\ 51;\ -9;\ 45;\ 3;\ 9;\ 27;\ 81.$

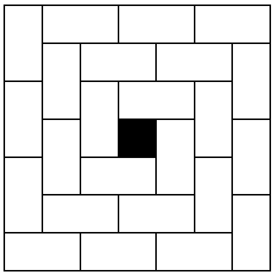
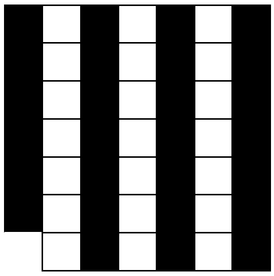
Из первой пары чисел получаются в результате одной операции 3 и 81, из второй пары получаются 9 и 81, из третьей пары 27 и 81. Итак, после этих трех операций будем иметь на доске две тройки, две девятки, два числа, равные 27, и четыре числа, равные 81. Две тройки за три операции последовательно превращаются (3; 3) –> (9; 9) –>**(**27; 27) –>**(**81; 81). Две девятки за две операции превращаются (9; 9) –>**(**27; 27) –>**(**81; 81), и два числа, равные 27, превращаются (27; 27) –>**(**81; 81). В результате, на доске все 10 чисел окажутся равными 81.

Для полного решения пункта **б)** достаточно привести пример 10 чисел (с указанием об операциях). Тем не менее, поясним, как можно прийти к подобному примеру. Для этого применим «обратный ход»: если нам нужно получить в результате одной операции числа (x, y), то числа (a,b) однозначно определяются из уравнений $a+2b=x$ и $b+2a=y$, а именно $a=(2y-x)/3$ и $b=(2x-y)/3$. Построим пример, используя такой метод обратного хода. Ясно, что из чисел 3, 3, 9, 9, 27, 27, 81, 81, 81, 81 легко получить десять чисел, равных 81 (как это сделано выше). Теперь рассмотрим такие три пары (3, 81), (9, 81) и (27, 81) из этих чисел и применим к ним обратный ход. Тогда получаются соответственно пары (-25, 53), (-21, 51) и (-9, 45), которые вместе с четырьмя числами .3, 9,27,81 дают искомый пример.

7.5. а) Можно ли клетчатый квадрат 7×7 с вырезанной центральной клеткой разрезать на доминошки (прямоугольники 2×1) так, чтобы число горизонтальных и вертикальных доминошек было одинаковым? **б)** Тот же вопрос для квадрата 7×7 с вырезанной угловой клеткой.

<u>Ответ.</u> а) Можно; **б**) нельзя. **<u>Решение.</u> а)** См. пример разрезания на рисунке. **б**) Раскрасим квадрат в два цвета, как показано на втором рисунке. У нас получится 27 черных клеток и 21 белая клетка. Заметим, что любая горизонтальная доминошка занимает одну черную и одну белую клетку, а вертикальная доминошка занимает две клетки одного цвета. Если предположить, от противного, что можно разрезать квадрат требуемым образом, то должно быть 12 горизонтальных и 12 вертикальных доминошек. Тогда из 21 белой клетки 12 клеток будет занято горизонтальными доминошками, а остальные 9 белых клеток не смогут быть заняты вертикальными доминошками (из-за нечетности числа 9). Полученное противоречие доказывает невозможность такого разбиения.

,

,