9 класс

9.1. Даны три положительных числа, не обязательно различных. Известно, что если из произведения любых двух из них вычесть третье, то получится одно и то же число a. Докажите, что $a \geq -\frac{1}{4}$.

Решение. При решении задачи 7.2 мы получили, что для положительных чисел реализуется только первый случай, а значит, все три числа должны совпадать, т.е. должны удовлетворять уравнению $x^2-x=a$. Это уравнение имеет действительные корни при условии $D = 1 + 4a \geq 0$, и значит, $a \geq -\frac{1}{4}$.

9.2. Существует ли такая точка с целыми координатами на координатной плоскости, расстояние от которой до начала координат равно $\sqrt{2\cdot 2017^2 + 2\cdot 2018^2}$?

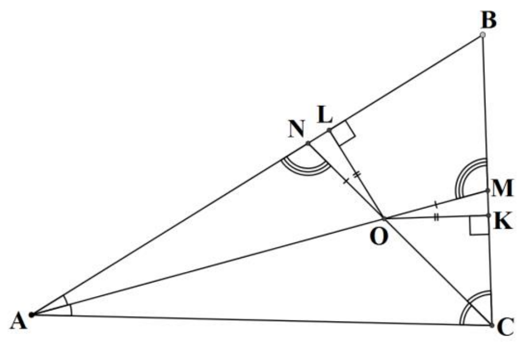
Ответ. Существует. **Решение.** Докажем, что для любого натурального n найдется точка с целыми координатами, расстояние от которой до начала координат равно $\sqrt{2n^2 + 2(n+1)^2}$. Для этого преобразуем последнее выражение $2n^2 + 2(n+1)^2 = 2n^2 + 2n^2 + 4n + 2 = (4n^2 + 4n + 1) + 1 = (2n+1)^2 + 1^2$. Поэтому (по теореме Пифагора) условию задачи удовлетворяет точка с координатами $(2n+1;1)$.

9.3. В 9а классе 30 человек, из них 22 посещают кружок французского языка, 21 – кружок немецкого языка и 18 – кружок китайского языка. Докажите, что в классе есть ученик, посещающий все три кружка.

Решение. См. задачу. 8.4.

9.4. Петя говорит Васе: «Я построил неравнобедренный треугольник ABC и провел биссектрисы AM и CN. Оказалось, что $OM = ON$, где O – точка пересечения биссектрис. Сможешь ли ты определить, чему равен угол B?» Вася отвечает: «Да такого не может быть, чтобы в неравнобедренном треугольнике отрезки OM и ON оказались равными». Кто из мальчиков прав?

Ответ. Прав Петя. **Решение.** Докажем, что для неравнобедренного треугольника со свойством $OM = ON$ угол B определяется однозначно, а именно $\angle B=60^\circ$. Более того, мы покажем, что любой неравнобедренный треугольник с углом при вершине 60° обладает этим свойством. Обозначим проекции точки O на стороны AB и BC через L и K соответственно. Так как O – центр вписанной окружности, то $OL=OK$. Поскольку треугольник неравнобедренный, точка N не совпадает с точкой L и точка M не совпадает с точкой K. В прямоугольных треугольниках NLO и MKO выполняются равенства $NO=OM$, $LO=OK$, поэтому эти два треугольника равны и следовательно, $\angle NOL=\angle KOM$. Покажем, что в случае неравнобедренного треугольника ABC порядок точек N,L,B на прямой AB отличается от порядка точек K,M,B на прямой CB : например, если точка L лежит внутри отрезка NB, то точка K лежит вне отрезка MB. Действительно, в противном случае, из равенства соответствующих углов равных треугольников NLO и MKO следует, что $\angle ANO=\angle CMO$ и учитывая равенство вертикальных углов $\angle AON=\angle COM$, имеем (по второму признаку равенства треугольников): $\Delta ANO=\Delta CMO \Rightarrow \angle A/2=\angle C/2$, значит, углы при основании треугольника ABC равны и он равнобедренный. Таким образом, получаем противоречие и поэтому точка K принадлежит отрезку MC, а значит, из равенства $\Delta NLO=\Delta MKO$ следует, что $\angle ANC=\angle AMB$. В таком случае имеем: $\angle BNO+\angle BMO= 180^\circ=\angle B+\angle NOM$. Но $\angle NOM = \angle AOC= 180^\circ-(\angle A+\angle C)/2=90^\circ + (\angle B/2)$. Отсюда $\angle B+(\angle B/2)+90^\circ= 180^\circ$ и значит, $\angle B=60^\circ$.



9.5. Найдите все пары натуральных чисел m, n:, для которых $n!+4!=m^2$ (где $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$).

Ответ: Две пары $n=1$, $m=5$ и $n=5$, $m=12$. **Решение.** Покажем, что $n<6$. Действительно, при $n\geq 6$ число $n!$ делится на 16. Следовательно, сумму $n!+4!$ можно представить в виде $8\cdot(2m+3)$. Данное число не может быть квадратом целого числа, так как в разложении на простые множители двойка входит в нечётной степени. Таким образом, n может принимать значения от 1 до 5, из которых подходят только 1 и 5. (Можно получить противоречие также из рассмотрения делимости на 3: при $n\geq 6$ число $n!$ делится на 9, а 4!=24 делится на 3, но не делится на 9, поэтому число в левой части уравнения не может быть квадратом целого числа).