"Будущие исследователи – будущее науки". Финальный тур 2017-18 уч.г.

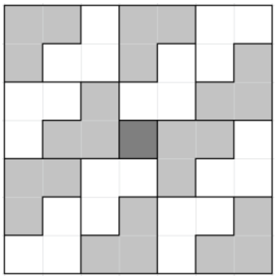
7 класс

7.1. В 7а классе 52% девочек. Все ученики класса могут выстроиться в ряд так, чтобы мальчики и девочки чередовались. Сколько учеников в классе?

Ответ. 25 учеников. **Решение.** Учитывая, что девочек в классе больше, чем мальчиков, из условия чередования получаем, что девочек больше ровно на одного человека. Следовательно, один человек составляет 52-48=4% от численности класса. Значит, учеников в классе (т.е. 100%) всего 100/4=25 человек.

7.2. Существуют ли три целых числа (среди которых могут быть одинаковые) такие, что если из произведения любых двух из них вычесть третье, то получится 2018?

Ответ:существуют. **Решение.** Можно непосредственно проверить, что тройка чисел– 1,– 1,– 2017 удовлетворяет условиям задачи. Покажем, как получить такую тройку. Обозначим искомые целые числа a,b,c. Рассмотрим два равенства $a\cdot b- c$=2018 и $b\cdot c- a$=2018.Вычитая из первого второе, получим $(b+1)\cdot(a- c)=0$. Отсюда либо $a=c$, либо $b= - 1$. Записав аналогичные равенства для других паруравнений, получим, что возможны только два случая: либо все числа одинаковы, либо среди них есть два, равных – 1. В первом случае получим уравнение $x^2- x=2018$, которое не имеет целых корней (см. также задачу 9.1). Второй случай даёт единственную тройку чисел – 1,– 1,– 2017.



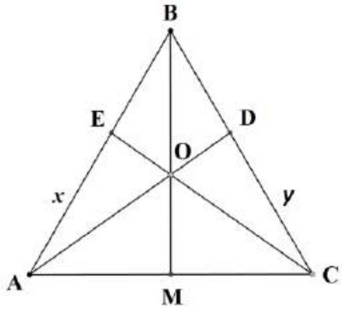
7.3. Дан клетчатый прямоугольник 7×14 (клеток). Какое наибольшее количество трехклеточных уголков можно вырезать из этого прямоугольника?

Ответ. 32 уголка. **Решение.** Очевидно, что можно вырезать не более 32 уголков, так как, в противном случае, прямоугольник должен содержать не менее 33·3=99>98 клеток. На рисунке показан пример разрезания одного квадрата 7х7 на 16 уголков. Соседний квадрат7х7разрезается точно так же.

7.4. **а)** Докажите, что существует такая пара двузначных чисел, что если к первому числу прибавить 15, а из второго вычесть 20, то полученные числа останутся двузначными, а их произведение окажется равным произведению исходных чисел. **б)** Сколько всего таких пар?

Ответ:б) 16 пар. **Решение.** Искомые числа x и y должны удовлетворять условию $(x+15)(y- 20)=xy$. Раскрыв скобки и преобразовав, получим уравнение $3y- 4x=60$. Из этого уравнения следует, что число x должно делиться на 3, а y–на 4, т.е. $x=3x_1$,$y=4y_1$для некоторых натуральных x_1,y_1. Тогда уравнение примет вид $y_1=5+x_1$.Нам нужно найти целые решения, удовлетворяющие неравенствам $10\le x<85$ и $30\le y<100$,что соответствует неравенствам $4\le x_1\le 28$ и $9\le y_1\le 24$. Учитывая уравнение $y_1=5+x_1$,получаем, что x_1может быть любым натуральным числом от 4 до 19 (=24–5), итогоx_1принимает 16 значений. Для каждоготакогоx_1 пара $(3x_1, 4(5+x_1))$ являетсяискомой. Например, при $x_1=10$ пара (30, 60) удовлетворяет условиям (любой подобный пример отвечает на вопрос пункта**а**).

7.5. В равнобедренном треугольнике ABC боковые стороны AB и BC точками деления разделены на n и $n+1$ равных частей соответственно ($n>1$). Из вершины A провели n отрезков в точки деления на стороне BC, а из вершины C – $(n-1)$ отрезков в точки деления на стороне AB. Затем провели медиану из вершины B. Могут ли какие-то три из проведенных отрезков пересекаться в одной точке внутри треугольника ABC?



Ответ. Не могут. **Решение.** Предположим, от противного, что отрезки AD, CE и BM пересекаются в одной точке O. Пусть отрезок AE содержит x из n частей деления на сторонеAB, а отрезок CD – yиз (n+1) частей деления на сторонеBC. При симметрии относительно медианы BM сторона AB переходит в сторону BC и точка D в точку E, поэтому $AE=CD$. Следовательно, $\frac{x}{n}=\frac{y}{n+1}$, т.е. $\frac{x}{y}=\frac{n}{n+1}$. Значит, дробь $\frac{n}{n+1}$ сократима, что невозможно в силу взаимно простоты n и $n+1$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение (Можно было получить равенство $AE=CD$, воспользовавшись вместо преобразования симметрии свойствами равнобедренных треугольников: а именно, сначала получив равенство углов при основании треугольника AOC, а затем доказав отсюда равенство треугольников ADCи AECпо второму признаку равенства треугольников).**Комментарий:** условие равнобедренности является несущественным (оно дано для простоты с учетом задачи для 7 класса): это можно показать, перейдя с помощью линейного преобразования от произвольного треугольника к равнобедренному (или даже равностороннему), либо воспользовавшись теоремой Чевы.