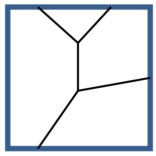
8 класс

8.1. Найдите значение выражения $\dfrac{(a^2+b^2)^2-c^2-4a^2b^2}{a^2+c-b^2}$ при $a = 2017$, $b = 2016$, $c = 2015$. Результат обоснуйте.

Ответ: 2018. **Решение**. Числитель равен $a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2-c^2 =$ $(a^2-b^2)^2-c^2$ $=$ $(a^2-b^2+c)(a^2-b^2-c)$, и после деления на знаменатель получим a^2-b^2-c $=$ $(a-b)(a+b)-c$ = 2017 + 2016 – 2015 = 2018.

8.2. Можно ли разрезать квадрат на четыре выпуклых многоугольника с разным числом сторон?



Ответ: можно. **Решение**. См. рис.

8.3. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На стороне BC отметили точки K и N (точка K лежит между B и N) так, что $KN = AN$. Докажите, что $AC < AB$.

Решение. Треугольник ANK равнобедренный, поэтому углы при основании равны. Обозначим $\alpha = \angle KAN = \angle NKA$. Очевидно, $\alpha < \angle A$ и $\alpha > \angle B$ (т.к. для треугольника ABK угол $\angle NKA$ внешний). Таким образом, $\angle A > \angle B$, откуда следует результат (против большего угла лежит бóльшая сторона).

8.4. На доске записано несколько (более двух) последовательных целых чисел. **а)** Докажите, что можно стереть одно число так, чтобы среднее арифметическое оставшихся чисел было целым. **б)** Какое число k (удовлетворяющее свойству п. а)) можно стереть, если записано сто чисел: 1, 2, …, 100? Укажите все возможные значения k.

Ответ: **б)** $k = 1$ или $k = 100$. **Решение**. **а)** Пусть записано n чисел: $a+1, a+2, ..., a+n$. Если n нечетно, т.е. $n = 2m-1$, то центральное число есть $a+m$, и его можно стереть, т.к. оно равно среднему арифметическому оставшихся $2m-2$ чисел (действительно, $(a+1)+(a+2m-1)=$ $(a+2)+(a+2m-2)$ $= \ldots =$ $(a+m-1)+(a+m+1)$ $= 2(a+m)$. Если же n четно, т.е. $n=2m$, то можно стереть первое число a + 1 или последнее число a + m, в первом случае среднее арифметическое остальных m – 1 чисел будет равно $a+m+1$, а во втором оно равно $a+m$ (т.к. $(a+2)+(a+2m)=(a+3)+(a+2m-1)=$ $\ldots$ $=$ $(a+m)+(a+m+2)$ $=$ $2(a+m+1)$) **б)** Сумма $S=1+2+\ldots+100$ = 5050 (она равна сумме 50 пар $1+100=2+99=\ldots=50+51=101$). Поэтому S – k должно делиться на 99. Имеем 5050 – k = 99p $\Leftrightarrow 99\cdot 51-(k-1)=99p$. Значит, k – 1 должно делиться на 99. Для k из первой сотни натуральных чисел это возможно лишь при k = 1 или k = 100.

8.5. Андрей и Сева собрались в гости к Боре. Андрей находится в пункте A, а Боря – в пункте B на расстоянии 30 км от пункта A по прямому шоссе. Сева находится в пункте C ровно посередине между A и B. Друзья решили отправиться одновременно: Андрей на велосипеде, а Сева пешком, но Андрей оставит велосипед в условленном месте, чтобы им воспользовался Сева (Андрей закончит путь пешком). На велосипеде мальчики двигаются со скоростью 20 км/час, а пешком – со скоростью 5 км/час. Где надо оставить велосипед, чтобы друзья смогли вместе как можно раньше попасть к Боре?

Ответ: за 5 км до пункта B. **Решение**. См. задачу 7.5.