10 класс

10.1. Решите уравнение $|x+1|=x^2+3x+1$.

Ответ: $x_1=0,\ x_2=-2-\sqrt{2}$. **Решение**. Если $x\ge -1$, то имеем $x^2+2x=0 \Rightarrow$ $x=0$ (корень $x=-2$ не удовлетворяет условию $x\ge -1$). Если $x<-1$, то имеем $x^2+4x+2=0 \Rightarrow$ $x=-2-\sqrt{2}$ (корень $-2+\sqrt{2}$ не удовлетворяет условию $x<-1$).

10.2. Каким числом – рациональным или иррациональным – является $\sqrt[3]{2016^2+2016\cdot 2017+2017^2+2016^3}$?

Ответ: целым рациональным числом 2017. **Решение**. См. задачу 9.2.

10.3. Дан параллелограмм *ABCD*. Можно ли утверждать, что *ABCD* – прямоугольник, если известно, что **а)** радиусы вписанных окружностей треугольников *ABC* и *ABD* совпадают? **б)** радиусы описанных окружностей треугольников *ABC* и *ABD* совпадают?

Ответ: а) можно; **б)** можно. **Решение**. **а)** Пусть r_1, r_2 – радиусы вписанных окружностей треугольников *ABC* и *ABD* соответственно, p_1, p_2 – их полупериметры. Из формулы $pr = S$ следует, что $p_1r_1=p_2r_2$, т.к. площади треугольников *ABC* и *ABD* равны (они равны половине площади параллелограмма). По условию, $r_1=r_2$, значит $p_1=p_2 \Rightarrow AC=BD$. Поскольку диагонали параллелограмма равны, *ABCD* – прямоугольник. **б)** Пусть R_1, R_2 – радиусы описанных окружностей треугольников *ABC* и *ABD.* Тогда $AC=2R_1\sin\angle B$ (в треугольнике *ABC*) и $BD=2R_2\sin\angle A$ (в треугольнике *ABD*). Поскольку $R_1=R_2$, а синусы углов *A* и *B* равны (т.к. углы в сумме составляют 180^o), опять получаем равенство диагоналей.

10.4. Найдите наименьшее натуральное число *n*, для которого **а)** *n*! делится на 2016; **б)** *n*! делится на 2016^{10}. (Напомним, что $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.)
Ответ: а) $n = 8$; **б)** $n = 63$. **Решение**. См. задачу 9.4.