9 класс

9.1. Существуют ли числа a, b, удовлетворяющие соотношению $a^2+3b^2+2=3ab$?

Ответ: не существуют. **Решение**. Результат следует из соотношения

$$a^2-3ab+3b^2+2=\left(a-\frac{3}{2}b\right)^2+\frac{3}{4}b^2+2\geq 2.$$

9.2. Докажите, что существуют два простых числа $p<q$, такие, что $q-p>2015$, а между p и q все натуральные числа – составные?

Решение. Обозначим $n=2015!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2015$. Тогда все 2015 чисел: $n+2, n+3, \ldots, n+2015, n+2016$ являются составными. Пусть p – самое большое простое число, не превосходящее $n+1$, а q – самое маленькое простое число, большее $n+2016$. Тогда $q-p>2015$.

9.3. Дан ΔABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно. Известно, что $MN \parallel AC$ и $BN=1$, $MN=2$, $AM=3$. Докажите, что $AC>4$.

Решение. Пусть $x=MB$, $y=AC$. Из неравенства треугольника в ΔBMN следует, что $x<3$. Из подобия ΔABC и ΔMBN имеем $\frac{y}{2}=\frac{3+x}{x}$. Отсюда $y=2+\frac{6}{x}>4$ (т.к. $x<3$).

9.4. **а**) Докажите, что число $\frac{2015^2+2017^2}{2}$ можно представить как сумму квадратов двух натуральных чисел. **б**) Докажите более общий факт: полусумму квадратов двух различных нечетных чисел можно представить как сумму квадратов двух натуральных чисел.

Решение. См. задачу 8.4.