7 класс

7.1. Имеется 19 кг крупы. Можно ли с помощью трех взвешиваний на чашечных весах отмерить 1 кг, если есть одна трехкилограммовая гиря?

Ответ: можно. **Решение**. Первым взвешиванием можно получить 8 кг крупы, если на одну (левую) чашку весов положить гирю и, отсыпая крупу из правой чашки на левую, уравновесить весы. Действительно, из уравнения $3 + x = 19 - x$ получим $x = 8$, т.е. на чашке с гирей будет 8 кг крупы. Оставим на весах 8 кг крупы и вторым взвешиванием разделим этот вес пополам, отсыпая и уравновешивая чашки весов. Последним взвешиванием получим 1 кг, если на одну чашку положим гирю, а на другую 4 кг крупы и затем отсыпем (в пакет) для равновесия ровно 1 кг.

7.2. Двумя перпендикулярными разрезами прямоугольник разрезали на четыре прямоугольника. Известно, что у трех из них периметр выражается целым числом. Обязательно ли и у четвертого прямоугольника периметр будет целым?

Ответ: обязательно. **Решение**. Пусть $ABCD$ – исходный прямоугольник и P – его периметр. Среди четырех маленьких прямоугольников есть два прямоугольника, содержащие противоположные вершины исходного прямоугольника. Для определенности пусть это будут вершины A и C, а периметры соответствующих прямоугольников обозначим P_A и P_C. Тогда $P_A + P_C = P$ (это следует из сложения составляющих сторон), и аналогично $P_B + P_D = P$. Отсюда, четвертый прямоугольник (для определенности, содержащий вершину D) имеет периметр $P_D = P_A + P_C - P_B$, т.е. целое число.

7.3. На контрольной в 7а присутствовало девочек на три человека больше, чем мальчиков. Результаты контрольной (по пятибалльной шкале) показали, что четверок было на 6 больше, чем пятерок, а троек вдвое больше, чем четверок. Докажите, что кто-то получил двойку или единицу.

Решение. Пусть n – количество пятерок, тогда четверок было $n + 6$, а троек $2(n + 6)$. Всего положительных оценок $n + n + 6 + 2(n + 6) = 4n + 18$, т.е. четное число. С другой стороны, число учеников нечетно (оно равно $2m + 3$, где m – число мальчиков. Поскольку количество учеников и положительных оценок не равны, были и плохие оценки.

7.4. В квадрате 4×4 (клетки) поставили крестики в восьми клетках. Обязательно ли в какой-то строке или в каком-то столбце будет ровно два крестика?

			x
x		x	x
	x	x	x
		x	

Ответ: не обязательно. **Решение**. См. пример.

7.5. На шахматной доске отметили центры некоторых клеток так, что никакой из треугольников с отмеченными вершинами не является прямоугольным. Какое наибольшее число точек могло быть отмечено?

Ответ: 14 точек. **Решение**. Назовем отмеченную точку вертикальной, если на ее вертикали других отмеченных точек нет. Аналогично определим горизонтальную точку. Заметим, что любая отмеченная точка является либо вертикальной, либо горизонтальной (либо и той и другой одновременно). Действительно, если бы у данной отмеченной точки A на ее вертикали была другая точка B, а на горизонтали точка C, то треугольник BAC был бы прямоугольным. Нетрудно привести пример на 14 точек, удовлетворяющих условию: отметим центральные точки в клетках a2, a3,…,a8 и в клетках b1,c1,…,h1 (т.е. во всех клетках первой вертикали и первой горизонтали кроме левой нижней клетки). Очевидно, все треугольники с отмеченными вершинами в этих точках тупоугольные. Покажем теперь, что больше 14 точек быть не может. Если есть 8 вертикальных точек, то они лежат в восьми разных вертикалях, и поэтому других отмеченных точек нет. Аналогично, если есть 8 горизонтальных точек, то девятой отмеченной точки быть не может. Значит, в оптимальном примере не более 7 горизонтальных и не более 7 вертикальных отмеченных точек, а всего отмеченных точек не более 14.