11 класс

11.1. Решите неравенство $\frac{x-\sin 5}{\sin 6} < \frac{\sin 5}{x-\sin 6}$.

Ответ: $x \in (\sin 5 + \sin 6; \sin 6) \cup (0; +\infty)$. **Решение**. Заметим, что $\sin 5 < 0$ и $\sin 6 < 0$, т.к. $\pi < 5 < 6 < 2\pi$. Неравенство перепишем в виде

$$\frac{x(x-\sin 5-\sin 6)}{\sin 6(x-\sin 6)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-(\sin 5+\sin 6))}{x-\sin 6} > 0.$$

Методом интервалов получаем ответ (поскольку $\sin 5 + \sin 6 < \sin 6 < 0$).

11.2. Найдите все параметры *b*, для которых система уравнений $\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 = 0 \\ ax + y = ab \end{cases}$ имеет решение при любом *a*.

Ответ: $b \in [0;2]$. **Решение**. Первое уравнение системы представляет собой окружность $(x-1)^2 + y^2 = 1$, ее центр – в точке (1; 0), радиус равен 1. Второе уравнение – это уравнение прямой с угловым коэффициентом (–*a*). Заметим, что эта прямая проходит через точку *M* с координатами (*b*; 0). Поэтому если *M* лежит на указанной окружности или внутри нее (т.е. при $b \in [0;2]$), то любая прямая, проходящая через *M*, пересекает окружность. Если же *M* лежит вне окружности, то найдется прямая, проходящая через *M*, не пересекающая окружность. Отсюда следует результат.

11.3. Дан треугольник *ABC*, вписанный в окружность ω. Точка *M* – основание перпендикуляра из точки *B* на прямую *AC*, точка *N* – основание перпендикуляра из точки *A* на касательную к ω, проведенную через точку *B*. Докажите, что *MN* || *BC*.

Решение. См. задачу 10.3.

11.4. **а)** Исследуйте функцию $y = \frac{\sqrt{x^2+1}+x-1}{\sqrt{x^2+1}+x+1}$ на четность (нечетность). **б**) Найдите область определения и множество значений этой функции.

Ответ: а) функция нечетная; **б)** область определения (–∞,∞), множество значений (–1; 1). **Решение**. См. задачу 10.4.

11.5. Последовательность a_n задается следующим образом: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{10}{9}$. Докажите, что a_n принимает целые значения для бесконечного множества номеров *n*.

Решение. Выражение для a_{n+2} перепишем в виде $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$. Поэтому для $n \ge 1$ будем иметь $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) = 4(a_n - a_{n-1}) = \ldots = 2^n(a_2 - a_1) = \frac{1}{9} \cdot 2^n$. Тогда $a_{n+2} = a_1 + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{n+2} - a_{n+1}) = 1 + \frac{1}{9}(1 + 2 + \ldots + 2^n) = 1 + \frac{1}{9}(2^{n+1} - 1)$. Осталось показать, что $2^{n+1} - 1$ делится на 9 для бесконечного множества номеров *n*. Действительно, если *n* + 1 делится на 6, то 2^{n+1} дает остаток 1 при делении на 9 (т.к. $2^6 = 64$ имеет вид $9m + 1$ и любые степени 2^{6k} будут иметь такой вид). Итак, члены последовательности $a_7, a_{13}, a_{19}, \ldots$ (каждый шестой) будут целыми числами.