

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур 9.03.2014

11 класс

- 11.1. Решите уравнение $1 - \cos 2x + 2 \cos^2 2x = 4 \sin x \cdot \cos 2x$.
- 11.2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{x^2 - 2xy} > \sqrt{1 - y^2}$.
- 11.3. Последовательность a_n задается соотношениями $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_n^2}{2}$; $a_1 = \frac{1}{2}$. Докажите, что a_n монотонно возрастает и $a_n < 2$ при всех n .
- 11.4. Существует ли n -угольная пирамида, на ребрах которой можно выбрать направления (стрелки) так, чтобы сумма всех $2n$ векторов-ребер равнялась нулевому вектору **а)** при $n = 9$; **б)** при $n = 10$?
- 11.5. На координатной плоскости рассматривается семейство концентрических окружностей с центром в точке $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$. **а)** Найдется ли окружность этого семейства, на которой есть две рациональные точки? **б)** Докажите, что существует окружность этого семейства, внутри которой (т.е. внутри круга) ровно 2014 целочисленных точек. (Рациональная (целочисленная) точка – это точка с рациональными (соответственно, целыми) координатами.)