

Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур 9.03.2014

10 класс

- 10.1. Какое из чисел больше: $\sqrt{100^2 - 99} + \sqrt{99^2 - 100}$ или $\sqrt{100^2 - 100} + \sqrt{99^2 - 99}$?
- 10.2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $|x + a| = \frac{1}{x}$ имеет ровно два корня.
- 10.3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{x^2 - 2xy} > \sqrt{1 - y^2}$.
- 10.4. Последовательность a_n задается соотношениями $a_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{a_n^2}{2}$; $a_1 = \frac{1}{2}$. Докажите, что a_n монотонно возрастает и $a_n < 2$ при всех n .
- 10.5. На координатной плоскости рассматривается семейство концентрических окружностей с центром в точке $M(\sqrt{2}; \sqrt{3})$. а) Найдется ли окружность этого семейства, на которой есть две рациональные точки? б) Докажите, что существует окружность этого семейства, внутри которой (т.е. внутри круга) ровно 2014 целочисленных точек. (Рациональная (целочисленная) точка – это точка с рациональными (соответственно, целыми) координатами.)