Межрегиональная олимпиада школьников
«Будущие исследователи – будущее науки»
Финальный тур 9.03.2014

Ответы и решения

11 класс

11.1. Решите уравнение $1-\cos 2x+2\cos^2 2x=4\sin x\cdot\cos 2x$.

Ответ: $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=(-1)^n\dfrac{\pi}{6}+\pi n$, $n,k\in\mathbf{Z}$. **Решение**. Исходное уравнение равносильно такому

$$2(\sin^2 x+\cos^2 2x-2\sin x\cdot\cos 2x)=0 \Leftrightarrow (\sin x-\cos 2x)^2=0 \Leftrightarrow \sin x-1+2\sin^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$(\sin x)_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$$. Отсюда следует результат.

11.2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\sqrt{x^2-2xy}>\sqrt{1-y^2}$.

Решение. См. задачу 10.3.

11.3. Последовательность a_n задается соотношениями $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{a_n^2}{2}$; $a_1=\dfrac{1}{2}$. Докажите, что a_n монотонно возрастает и $a_n<2$ при всех n.

Решение. См. задачу 10.4.

11.4. Существует ли n-угольная пирамида, на ребрах которой можно выбрать направления (стрелки) так, чтобы сумма всех $2n$ векторов-ребер равнялась нулевому вектору **а)** при $n=9$; **б)** при $n=10$?

Ответ: **а)** не существует; **б)** существует. **Решение**. **а)** Рассмотрим ось, перпендикулярную основанию пирамиды с началом координат на плоскости основания. Если проектировать боковые векторы-ребра на эту ось, то все проекции будут равны по модулю, и поскольку их нечетное число, сумма проекций не может равняться нулю. Значит, не существует искомого выбора стрелок. **б)** Можно взять пирамиду, у которой основание $A_1A_2...A_{10}$ – правильный 10-угольник, и расставить в основании направления по часовой стрелке: $\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_2A_3},...,\overrightarrow{A_{10}A_1}$. Направления на боковых ребрах такие: $\overrightarrow{SA_1},\overrightarrow{A_2S},\overrightarrow{SA_3},\overrightarrow{A_4S},...,\overrightarrow{SA_9},\overrightarrow{A_{10}S}$. Тогда $\overrightarrow{SA_1}+\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2S}=\vec{0}$,…, $\overrightarrow{SA_9}+\overrightarrow{A_9A_{10}}+\overrightarrow{A_{10}S}=\vec{0}$ и остается сумма пяти векторов $\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_4A_5}+\overrightarrow{A_6A_7}+\overrightarrow{A_8A_9}+\overrightarrow{A_{10}A_1}$. Эта сумма также равна $\vec{0}$, т.к. представляет собой сумму векторов-сторон (по часовой стрелке) правильного пятиугольника.

11.5. На координатной плоскости рассматривается семейство концентрических окружностей с центром в точке $M(\sqrt{2};\sqrt{3})$. **а)** Найдется ли окружность этого семейства, на которой есть две рациональные точки? **б)** Докажите, что существует окружность этого семейства, внутри которой (т.е. внутри круга) ровно 2014 целочисленных точек. (Рациональная (целочисленная) точка – это точка с рациональными (соответственно, целыми) координатами.)

Решение. См. задачу 10.5.