Ответ: 16. **Решение.** Целочисленные точки в первом квадранте соответствуют натуральным делителям числа $2013 = 3 \cdot 11 \cdot 61$. Количество таких делителей равно 8 (можно их выписать непосредственно или воспользоваться формулой $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_k + 1)$ для количества натуральных делителей числа $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot p_k^{\alpha_k}$.) С учетом симметричных точек в третьем квадранте получаем ответ.

9.4. В треугольнике *ABC* биссектриса *AM* перпендикулярна медиане *BK*. Найдите отношения $BP{:}PK$ и $AP{:}PM$, где P – точка пересечения биссектрисы и медианы.
Ответ: $BP{:}PK = 1$, $AP{:}PM = 3{:}1$. См. задачу 8.4.

10 класс

10.1. Числа x, y удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x + y = a \\ x^2 + y^2 = -a^2 + 2 \end{cases}.$$

Какое наибольшее и какое наименьшее значение может принимать произведение xy ?
Ответ: Наибольшее значение равно 1/3, наименьшее равно –1. См. задачу 9.2.

10.2. Сколько точек на гиперболе $y = \dfrac{2013}{x}$ имеют целочисленные координаты $(x;y)$?

Ответ: 16. См. задачу 9.3.

10.3. Существует ли такое число x, для которого оба числа $(\sin x + \sqrt{2})$ и $(\cos x - \sqrt{2})$ являются рациональными?

Ответ: Не существует. **Решение.** Предположим, от противного, что $\sin x + \sqrt{2} = p$, $\cos x - \sqrt{2} = q$, где p и q - рациональные числа. Тогда $1 = \sin^2 x + \cos^2 x = (p - \sqrt{2})^2 + (q + \sqrt{2})^2 = (p^2 + q^2 + 4) - 2(q - p)\sqrt{2}$. Если $q - p \neq 0$, то отсюда сразу получаем противоречие (в левой части – рациональное число, в правой – иррациональное). Если $p = q$, то $\sin x - \cos x = 2\sqrt{2}$, что также приводит к противоречию, т.к. $|\sin x - \cos x| \leq 2$, а $2\sqrt{2} > 2$.

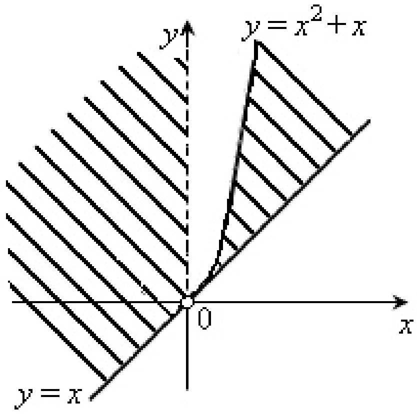
10.4. Дан прямоугольник, для которого численное значение площади больше периметра. Докажите, что периметр прямоугольника больше 16.
Решение. Пусть a, b – стороны прямоугольника. Из условия задачи $ab > 2a + 2b$ $\Leftrightarrow (a-2)(b-2) > 4$ (*)
Сначала проверим, что оба множителя $(a - 2)$ и $(b - 2)$ положительны. Действительно, в противном случае из (*) следует, что $a - 2 < 0$, $b - 2 < 0$. Тогда $-2 < a - 2 < 0$, $-2 \leq b - 2 < 0$ и поэтому $(a-2)(b-2) = (2-a)(2-b) < 2 \cdot 2 = 4$, что противоречит (*). Теперь для положительных чисел $(a - 2)$ и $(b - 2)$ можно воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим: $(a-2) + (b-2) \geq 2\sqrt{(a-2)(b-2)} > 4 \Rightarrow a + b > 8 \Leftrightarrow P > 16$.

11 класс

11.1. Решите уравнение $2\cos^2 x + \sqrt{\cos x} = 3$.
Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Решение. Поскольку $2\cos^2 x + \sqrt{\cos x} \leq 2 \cdot 1 + 1 = 3$, то равенство может выполняться лишь при условии $\cos x = 1$, откуда следует ответ.

11.2. Изобразите на координатной плоскости множество точек, удовлетворяющих неравенству $\frac{\sqrt{y-x}}{x} \le 1$.

Решение. При $x > 0$ исходное неравенство запишется в виде $\sqrt{y-x} \le x \Leftrightarrow 0 \le y-x \le x^2 \Leftrightarrow x \le y \le x+x^2$, т.е. множество из правой полуплоскости лежит между графиками $y = x$ и $y = x^2 + x$. Легко проверить, что парабола $y = x^2 + x$ касается прямой $y = x$ в начале координат (см. рис.). При $x < 0$ левая часть исходного неравенства отрицательна в области определения, т.е. множество из левой полуплоскости, расположенное выше графика $y = x$, удовлетворяет нашему неравенству.



11.3. Сколько на гиперболе $y = \frac{2013}{x}$ точек таких, что касательная в них пересекает обе координатные оси в точках с целочисленными координатами?

Ответ: 48 точек. **Решение.** Обозначим $k = 2013$. Уравнение касательной к гиперболе $y = \frac{k}{x}$ в точке (x_0, y_0) есть $y - y_0 = -\frac{k}{x_0^2}(x - x_0)$, где $y_0 = \frac{k}{x_0}$. Отсюда находим координаты точек пересечения касательной с осями *Ox* и *Oy*, а именно $x_1 = 2x_0$, $y_1 = \frac{2k}{x_0} = 2y_0$. Значит, $2x_0$ – целое число; обозначим его через *n*. Тогда $y_1 = \frac{2k}{x_0} = \frac{4k}{n} = \frac{4 \cdot 2013}{n}$. Таким образом, *n* может принимать значения любого делителя числа $N = 4 \cdot 2013 = 2^2 \cdot 3^1 \cdot 11^1 \cdot 61^1$. Количество натуральных делителей числа *N* равно (2+1)(1+1)(1+1)(1+1) = 24 (т.к. любой делитель имеет вид $2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 11^{\alpha_3} \cdot 61^{\alpha_4}$, где $0 \le \alpha_1 \le 2$, $0 \le \alpha_{2,3,4} \le 1$). С учетом отрицательных делителей (соответствующих касательным в третьей четверти) получаем всего 48 точек.

11.4. Дан прямоугольник, для которого численное значение площади больше периметра. Докажите, что периметр прямоугольника больше 16.

Решение. См. задачу 10.4.