11 класс

11.1. Решите уравнение $2\sin^2 x+1=\cos(\sqrt{2}x)$.

Ответ: x=0. **Решение.** Левая часть уравнения ≥ 1, а правая ≤ 1. Значит, уравнение равносильно системе: $\sin x=0,\ \cos\sqrt{2}x=1$. Имеем: $x=\pi n$, $\sqrt{2}x=2\pi k$ (n, k – целые). Отсюда $n=k\cdot\sqrt{2}$. Поскольку $\sqrt{2}$ – число иррациональное, последнее равенство возможно лишь при $n=k=0$.

11.2. Дано квадратное уравнение $a^3x^2+b^3x+c^3=0$, имеющее два корня. Докажите, что уравнение $a^5x^2+b^5x+c^5=0$ тоже имеет два корня.

Решение. Имеем $b^6>4a^3c^3$, т.к. квадратное уравнение имеет положительный дискриминант. Требуется доказать, что $b^{10}>4a^5c^5$. Если $ac<0$, то последнее неравенство очевидно. Если же $ac\geq 0$, то из неравенства $(b^2)^3>4(ac)^3$ в силу монотонного возрастания функции $y=x^{5/3}$ получим $(b^2)^5>4^{5/3}\cdot(ac)^5>4(ac)^5$.

11.3. Дана окружность единичного радиуса, AB – ее диаметр. Точка M движется по окружности, M_1 – ее проекция на AB. Обозначим $f(M)=AB+MM_1-AM-BM$. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(M)$.

Ответ: наименьшее значение 0; наибольшее $3-2\sqrt{2}$.

Решение. Пусть $\angle MAB=\alpha$, $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Тогда $f(M)=2+2\cos\alpha\sin\alpha-2\cos\alpha-2\sin\alpha$. Обозначим это выражение через $g(\alpha)$. Имеем $g'(\alpha)=2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\sin\alpha-\cos\alpha)=$ $=2(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha-1)$. Вторая скобка неотрицательна при всех $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, т.к. для данных α это неравенство следует из неравенства $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2\geq 1$, т.е. $2\sin\alpha\cos\alpha\geq 0$. Таким образом, $g'(\alpha)=0$ при $\alpha=0$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ и $\alpha=\frac{\pi}{4}$ ($\alpha=\frac{\pi}{4}$ – единственный корень первой скобки). Учитывая знак производной, получаем, что $g(0)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ – наименьшее значение, а $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=2+1-2\sqrt{2}=3-2\sqrt{2}$ – наибольшее.

11.4. Сколько существует пифагоровых треугольников, у которых один из катетов равен 2013? (Пифагоров треугольник – это прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами. Равные треугольники засчитываются за один.).

Ответ: 13. **Решение.** Из теоремы Пифагора получаем уравнение в целых числах $2013^2+x^2=y^2 \Leftrightarrow (y-x)(y+x)=2013^2=3^2\cdot 11^2\cdot 61^2$. Это уравнение равносильно системе $\begin{cases} y-x=d_1 \\ y+x=d_2 \end{cases}$, где d_1, $d_2=\frac{2013^2}{d_1}$ – натуральные делители числа 2013^2. Решение системы $x=\frac{d_2-d_1}{2}$, $y=\frac{d_2+d_1}{2}$ будет целочисленным, т.к. d_1 и d_2 – нечетные числа. Чтобы число x было натуральным, делитель d_2 должен быть больше d_1, т.е. $d_2>2013$, $d_1<2013$. Количество всех натуральных делителей числа 2013^2 равно (2+1)(2+1)(2+1)=27, как следует из указанного разложения 2013^2. Из этих делителей только $\frac{27-1}{2}=13$ удовлетворяют условию $d>2013$ (выкидываем "центральный" делитель d=2013, а остальные делители делятся на пары (d_1,d_2), где $d_1\cdot d_2=2013$, и из каждой пары выбираем $d_2>d_1$).

11.5. Имеется 100 палочек длины 1, 0.9, $(0.9)^2$, …, $(0.9)^{99}$. Можно ли из этих палочек, используя не обязательно все, сложить равнобедренный треугольник?

Ответ: нельзя. **Решение.** См. задачу 10.5.