10 класс

10.1. Дано сто чисел: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{100}$. Вычислим 98 разностей: $a_1 = 1 - \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$, …, $a_{98} = \frac{1}{98} - \frac{1}{100}$. Чему равна сумма всех этих разностей?

10.2. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} |x| + |y-1| = 1 \\ y = a \cdot x + 2012 \end{cases}$ имеет единственное решение.

10.3. а) Докажите, что квадрат можно разбить на 40 квадратиков.

б) Можно ли добиться того, чтобы в искомом разбиении стороны квадратиков принимали лишь два значения $a < b$, отличающиеся не более, чем на 25% (т.е. $\frac{b}{a} \le 1{,}25$).

10.4. На стороне AC треугольника ABC взята точка M. Оказалось, что $AM = BM + MC$ и $\angle BMA = \angle MBC + \angle BAC$. Найдите $\angle BMA$.

10.5. Могут ли величины углов четырехугольника, вписанного в окружность, представлять собой (в некотором порядке): а) арифметическую прогрессию с ненулевой разностью; б) геометрическую прогрессию со знаменателем, отличным от единицы.

Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки» 2011/2012
Математика. **Финальный тур**

II вариант

10 класс

1. Решить уравнения в действительных числах:
   a) $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = 0$
   b) $x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4 = -1$

2. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M внутри него. Пусть $MA=a$, $MB=b$, $MC=c$, $MD=d$. Доказать, что существует выпуклый четырехугольник со сторонами a, b, c, d, имеющий площадь вдвое меньше площади прямоугольника $ABCD$.

3. Найти наименьшее натуральное n, для которого найдутся натуральные числа x, y, удовлетворяющие уравнению $x(x + n)=y^2$.

4. В математической олимпиаде приняли участие ученики 8-11 классов; всего участвовало 145 человек. В каждой из четырех параллелей было предложено по пять задач. Каждая задача оценивалась целым числом баллов, максимальная оценка за задачу – 7 баллов. Доказать, что хотя бы в одной из параллелей найдутся два ученика, набравшие одинаковую сумму баллов

5. Внутри треугольника ABC площади 2012 отмечено 2012 точек. Доказать, что внутри треугольника ABC найдется такой треугольник площади 0,99, который не содержит ни одной отмеченной точки.