11 класс.

11.1. Для всех возможных значений параметра a решите уравнение

$$\log_2 \sqrt{\cos x} = \log_4 (a \cdot \sin x).$$

Ответ. При $a = 0$ уравнение не имеет смысла;

при $a > 0$ $x = \operatorname{arcctg} a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$;

при $a < 0$ $x = \pi + \operatorname{arcctg} a + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$.

Решение. При $a = 0$ уравнение не имеет смысла. Перейдя в правой части к основанию 2, получим равносильное уравнение $\log_2 \sqrt{\cos x} = \log_2 \sqrt{a \sin x}$. Область определения уравнения есть $\begin{cases} \cos x > 0 \\ a \sin x > 0 \end{cases}$. На области определения имеем тригонометрическое уравнение $\cos x = a \sin x \Leftrightarrow$ $\operatorname{ctg} x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ и, учитывая область определения, будем иметь: 1) при $a > 0$ $x = \operatorname{arcctg} a + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$ (т.к. иначе x лежит в третьей четверти, и тогда $a \sin x < 0$); 2) при $a < 0$ $x = \pi + \operatorname{arcctg} a + 2\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$ (т.к. иначе x лежит во второй четверти, и тогда $a \sin x < 0$).

11.2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy + x = 15 \\ x^2 + y^2 + xy + y = 41 \end{cases}.$$

Ответ. (3;4), (5;2). **Решение**. Сложив уравнения, получим $(x + y)^2 + (x + y) = 56$. Пусть $x + y = t$, тогда $t^2 + t - 56 = 0 \Leftrightarrow t_1 = -8,\ t_2 = 7$. Таким образом, имеем совокупность двух систем, равносильную исходной системе: 1) $\begin{cases} x + y = -8 \\ xy + x = 15 \end{cases}$ и 2) $\begin{cases} x + y = 7 \\ xy + x = 15 \end{cases}$. Выражая y из первого уравнения и подставляя во второе, получим квадратное уравнение. В случае 1) $x^2 + 7x + 15 = 0$; в случае 2) $x^2 - 8x + 15 = 0$. В первом случае $D < 0$, и решения нет; во втором случае $x_1 = 3,\ x_2 = 5$. Соответствующие значения $y_1 = 7 - x_1 = 4,\ y_2 = 7 - x_2 = 2$.

11.3. Найдите область определения и множество значений функции

$$y = \sqrt{x^2 + 3x + 2} + \frac{1}{\sqrt{2x^2 + 6x + 4}}.$$

Ответ. Область определения $x < -2,\ x > -1$; множество значений $y \geq \sqrt[4]{8}$.

Решение. Область определения задается неравенством $x^2 + 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow$ $x < -2$ или $x > -1$. Для нахождения множества значений обозначим $t = \sqrt{x^2 + 3x + 2}$. Тогда $t > 0$ и $y = t + \dfrac{1}{\sqrt{2}t}$. Далее можно исследовать функцию $y(t)$ с помощью производной и убедиться, что она убывает на промежутке $\left(0; \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ и возрастает на промежутке $\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}; +\infty\right)$; наименьшее значение y равно $y\left(\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{2}} + \dfrac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{8}$, а наибольшего значения нет, поскольку $y(t) > t$ и, значит, $y(t)$ принимает сколь угодно большие положительные значения. В силу непрерывности функции $y(t)$ получаем множество значений $(\sqrt[4]{8}; +\infty)$.

Можно получить результат и без использования производной, если применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим::

$y = t + \frac{1}{\sqrt{2}t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}t}} = \sqrt[4]{8}$ (где равенство достигается при $t = \frac{1}{\sqrt{2}t}$, т.е. $t = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$).

11.4. Могут ли величины углов четырехугольника, вписанного в окружность, представлять собой (в некотором порядке): а) арифметическую прогрессию с ненулевой разностью? б) геометрическую прогрессию со знаменателем, отличным от единицы?
Ответ. а) Могут; б) не могут. **Решение**. См. решение задачи 10.5.

11.6. Ребра SA, SB и SC тетраэдра $SABC$ взаимно перпендикулярны, а их длины равны, соответственно, 2; 3 и 6. а) Найдите радиус R сферы, описанной около тетраэдра. б) Существует ли сфера радиуса, меньшего, чем R, содержащая данный тетраэдр?
Ответ. а) $R = 7/2$; б) существует. **Решение**. Рассмотрим прямоугольную систему координат в пространстве с началом в точке S и осями координат вдоль ребер OA, OB и OC. Центр описанной сферы можно найти разными способами. Один из них – непосредственный: если записать в координатах для искомого центра $O(x,y,z)$ равенство квадратов расстояний $OA^2 = OB^2 = OC^2 = OS^2$. .Вычитая полученные уравнения, будем иметь линейные уравнения, из которых легко найти x, y, z. Другой способ состоит в том, чтобы заметить, что центр сферы должен проецироваться на плоскость треугольника ABS в центр описанной окружности этого треугольника, т.е. в середину гипотенузы AB – точку $\left(1; \frac{3}{2}; 0\right)$ и, значит, координаты центра сферы имеют вид $\left(1; \frac{3}{2}; z\right)$. Аналогично, рассматривая треугольник ACS, получим, что координата z должна быть равна половине значения z_C, т.е. равна 3. В результате $R = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3^2} = \frac{7}{2}$. Третий способ состоит в следующем: заметим, что для прямоугольного параллелепипеда со сторонами SA, SB и SC его центр равноудален от всех вершин параллелепипеда и, в частности, от A, B, C и S. Значит, радиус R равен половине диагонали параллелепипеда: $R = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} = \frac{7}{2}$.
б) Рассмотрим центр O_1 окружности, описанной около треугольника ABC. Точка O_1 является проекцией центра $O(x,y,z)$ сферы на плоскость ABC. Если решать задачу пункта а) в координатах, то далее нетрудно найти координаты точки O_1 как проекции точки O на плоскость: $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$ (уравнение плоскости ABC) и убедиться, что расстояние от O_1 до всех вершин тетраэдра меньше R. Но можно обойтись и без подробных вычислений.. Действительно, сначала заметим, что точки S и O лежат по разные стороны от плоскости ABC (это следует, например, из пункта а), см. второй способ нахождения центра O). Далее, расстояния $O_1A = O_1B = O_1C$ строго меньше R , т.к. R – это длина гипотенузы в соответствующих прямоугольных треугольниках OO_1A, OO_1B, OO_1C.. А расстояние $O_1S < OS = R$, поскольку треугольник SOO_1 – тупоугольный с тупым углом SO_1O; это следует из равенства $\angle OO_1M = 90°$, где M – точка пересечения прямой SO с плоскостью ABC. Итак, все расстояния от O_1 до вершин тетраэдра меньше R, и поэтому сфера с центром O_1 и радиусом, равным минимальному из этих расстояний, будет искомой.

11 класс

1. Сначала проверяется, что $\frac{\pi}{2}$ - период функции. Чтобы доказать, что это наименьший период, сделаем замену $u = \sin^2 x$. Тогда $y = (1-u)^{50} + u^{50}$. Рассматривая функцию $y(u)$ на отрезке $[0,1]$ (что соответствует изменению x на промежутке от 0 до $\frac{\pi}{2}$), получаем, что $y(u)$ убывает на отрезке $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ и возрастает на отрезке $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ (в этом можно убедиться, используя производную). Отсюда следует, что функция $y(x) = \cos^{100} x + \sin^{100} x$ не может иметь периода меньше $\frac{\pi}{2}$.
2. См. указание к задаче 2 (10 класс).
3. Решение задачи аналогично решению задачи 1 б) (10 класс) с той лишь разницей, что вместо выражения $x + y$ рассматривается $x - y$.
4. Из данных шести целых чисел выбираем a, c, имеющие одинаковые остатки при делении на 3, а затем из оставшихся четырех выбираем b, d, имеющие одинаковые остатки при делении на 3. Тогда a,b,c,d - искомые числа.
5. Пусть $x_1, x_2 \in Z$ - корни квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ и $n \in Z$ - один из корней уравнения $x^2 + px + q = 2011$. Тогда $(n - x_1)(n - x_2) = 2011$. Поскольку 2011 – простое число, то $|x_1 - x_2| = 2010$.. Зная расстояние между корнями приведенного квадратного уравнения, можно однозначно определить ординату вершины параболы. <u>**Ответ: -1005^2**</u>