

**Решение.**

1. Время разбега самолета от момента старта до момента отрыва от земли составляет 15 секунд. Найдите длину разбега, если для данной модели самолета скорость отрыва составляет 100 км/час. Считать движение самолета во время разбега равноускоренным. Ответ дайте в метрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

Ответ: 208

$$v = at, 100000/3600 = a \cdot 15, \text{ откуда } a = 1,85 \text{ (м/с}^2\text{)}. \text{ Тогда } S = at^2/2 = 208 \text{ (м)}.$$

2. Даны три жидкости, плотности которых относятся как  $\rho_1 : \rho_2 : \rho_3 = 6 : 3 : 2$ . Из этих жидкостей готовят смесь, в которой первой жидкости должно быть больше, чем второй, как минимум в 3,5 раза. В каком отношении надо взять массы этих жидкостей, чтобы после их перемешивания плотность смеси оказалась равной среднему арифметическому плотностей исходных жидкостей?

Пусть плотность первой жидкости равна  $\rho_1 = 6k$ . Тогда  $\rho_2 = 3k, \rho_3 = 2k$ . Средняя арифметическая плотность  $\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2 + \rho_3}{3} = \frac{11}{3}k$ . Введем обозначения  $\frac{m_2}{m_1} = x, \frac{m_3}{m_1} = y$ . По условию  $\frac{1}{x} \geq 3,5$ . Результирующую плотность смеси можно выразить формулой  $\frac{m_1 + m_2 + m_3}{\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} + \frac{m_3}{\rho_3}} = \rho$ . С уче-

том обозначений и небольших преобразований получим:

$$\frac{\rho}{6k} = \frac{1+x+y}{1+2x+3y} \Leftrightarrow \frac{1+x+y}{1+2x+3y} = \frac{11}{18} \Leftrightarrow 4x + 15y = 7. \text{ Положим } x = \frac{1}{4}, \text{ тогда } y = \frac{2}{5}. \text{ Это значит, что}$$

можно положить  $m_1 = 20z, m_2 = 5z, m_3 = 8z$ .

Ответ: например: 20:5:8 или 7:1:3 или любой, удовлетворяющий уравнению  $4x + 15y = 7$

при условии  $\frac{1}{x} \geq 3,5$ .

3. Проектируется крытое футбольное поле прямоугольной формы длиной 90 м, шириной 60 м, которое должно освещаться четырьмя прожекторами, каждый из которых висит в какой-то точке на потолке. При этом каждый прожектор освещает круг, радиус которого равен высоте, на которой висит прожектор. Необходимо найти минимально возможную высоту потолка, при которой выполняются следующие условия: каждая точка футбольного поля освещается хотя бы одним прожектором; высота потолка должна быть кратной 0,1 м (например, 19,2 м, 26 м, 31,9 м).

Ответ: 27,1

Пусть в прямоугольнике  $ABCD$  диагонали пересекаются в точке  $O$ . Разместим прожекторы на потолке над точками, являющимися серединами отрезков  $AO$ ,  $BO$ ,  $CO$  и  $DO$ , на высоте, равной четверти диагонали прямоугольника. Тогда первый прожектор будет полностью освещать круг, внутри которого находится прямоугольник с диагональю  $AO$ ), второй прожектор будет освещать прямоугольник с диагональю  $BO$  и так далее. В итоге всё поле будет

освещено. В этом случае высота потолка равна  $\frac{\sqrt{90^2 + 60^2}}{4} = \frac{5}{2}\sqrt{117} = \frac{15}{2}\sqrt{13}$  м.

Необходимо доказать, что более «выгодного» расположения нет. Для этого применяем принцип Дирихле. Если взять 5 точек на поле: точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $O$  (важно, что расстояние между любыми двумя из этих точек не меньше, чем половина диагонали прямоугольника), и предположить, что диаметр круга меньше, чем половина диагонали, то один прожектор осветит не больше, чем одну из этих четырех точек. Значит, хотя бы одна из этих 5 точек окажется неосвещенной.

Осталось оценить сверху величину  $\frac{15}{2}\sqrt{13}$ . Так как  $\frac{15}{2}\sqrt{13} = \sqrt{731,25}$ , а  $27^2 = 729 < 731,25 < 734,41 = 27,1^2$ , то высота потолка должна быть равна 27,1 м.

4. **Горячее масло при температуре  $100^\circ\text{C}$  в объеме двух литров смешали с одним литром холодного масла при температуре  $20^\circ\text{C}$ . Какой объем будет иметь смесь, когда в смеси установится термодинамическое равновесие? Потерями тепла во внешнюю среду можно пренебречь. Коэффициент объемного расширения масла  $2 \cdot 10^{-3} \text{ 1}^\circ\text{C}$ .**

Ответ: 3

Пусть  $V_1 = 2$  л – объем горячего масла, а  $V_2 = 1$  л – объем холодного масла. Тогда можно записать  $V_1 = U_1(1 + \beta t_1)$ ,  $V_2 = U_2(1 + \beta t_2)$ , где  $U_1, U_2$  – объемы соответствующих порций масла при нулевой температуре;  $t_1 = 100^\circ\text{C}$ ,  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ ;  $\beta = 2 \cdot 10^{-3} \text{ 1}^\circ\text{C}$  - коэффициент объемного расширения.

Из уравнения баланса тепла:  $cm_1(t - t_1) + cm_2(t - t_2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}$ , где  $m_1, m_2$  – массы горячей и холодной порций масла соответственно;  $t$  – температура смеси.

Заметим, что  $m_1 = U_1 \rho$ ,  $m_2 = U_2 \rho$ , где  $\rho$  – плотность масла при нулевой температуре.

Тогда  $W_1 = U_1(1 + \beta t)$ ,  $W_2 = U_2(1 + \beta t)$ . Здесь  $W_1, W_2$  – объемы исходных порций масла при температуре  $t$ .

Новый общий объем масла будет равен

$$W_1 + W_2 = (U_1 + U_2)(1 + \beta t) = \left(\frac{m_1}{\rho} + \frac{m_2}{\rho}\right)(1 + \beta t) = \frac{1}{\rho}(m_1 + m_2 + (m_1 + m_2)\beta t) = \\ \frac{1}{\rho}(m_1 + m_2 + m_1\beta t_1 + m_2\beta t_2) = \frac{1}{\rho}(m_1 + m_1\beta t_1) + \frac{1}{\rho}(m_2 + m_2\beta t_2) = \frac{m_1}{\rho}(1 + \beta t_1) + \frac{m_2}{\rho}(1 + \beta t_2)$$

То есть,  $W_1 + W_2 = U_1(1 + \beta t_1) + U_2(1 + \beta t_2) = V_1 + V_2$

Таким образом, объем не изменится.

5. Гаврила сел в электричку с полностью заряженным смартфоном, и ровно к концу поездки его смартфон полностью разрядился. При этом половину всего времени он играл в Тетрис, а вторую половину смотрел мультики. Известно, что смартфон полностью разряжается за 3 часа просмотра видео или за 5 часов игры в Тетрис. Какое расстояние проехал Гаврила, если электричка половину пути двигалась со средней скоростью 80 км/ч, вторую половину пути – со средней скоростью 60 км/ч? Ответ дайте в километрах, при необходимости округлив до ближайшего целого числа.

Ответ: 257

Примем «емкость» батареи смартфона за 1 условную единицу (у. е.). Тогда скорость разрядки смартфона при просмотре видео равна  $\frac{1}{3}$  у. е./час, скорость разрядки при игре равна

$\frac{1}{5}$  у.е./час. Если все время движения обозначить за  $t$  часов, то получаем уравнение

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{t}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{t}{2} = 1, \text{ откуда } \frac{(5+3)t}{2 \cdot 3 \cdot 5} = 1, \text{ то есть } t = \frac{15}{4} \text{ часа.}$$

Тогда получается (здесь  $S$  – длина пути):  $\frac{S}{2 \cdot 80} + \frac{S}{2 \cdot 60} = \frac{15}{4}$ , то есть  $\frac{S}{40} + \frac{S}{30} = 15$ ,

$$S = 15 \cdot \frac{40 \cdot 3}{4 + 3} = \frac{1800}{7} \approx 257 \text{ км.}$$

**9 класс**

Каждая задача оценивается в **20 баллов**. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

**Критерии оценок задач:**

**Задача 1. 20 баллов:** правильное решение и правильный ответ;

**15 баллов:** ошибка в округлении;

**10 баллов:** вычислительные ошибки;

**5 баллов:** идейно правильное решение, ошибки в формулах.

**Задача 2. 20 баллов:** правильное решение и правильный ответ;

**15 баллов:** правильное решение, нет вычислительных ошибок, ошибка в записи ответа;

**10 баллов:** получено верное выражение для плотности смеси; ответ неверный

**5 баллов:** идейно верное решение, ответ неверен из-за вычислительной ошибки.

**Задача 3. 20 баллов:** правильное решение и правильный ответ;

**15 баллов:** получено ближайшее кратное 0,1 значение высоты потолка, вместо оценки сверху;

**15 баллов:** в оценке высоты потолка используются необоснованные выводы;

**15 баллов:** не доказано, что высота не может быть меньше данной (с помощью принципа Дирихле или других рассуждений);

**10 баллов:** наличие более одного из приведенных выше недочётов при верном ответе;

**Задача 4. 20 баллов:** правильное решение и правильный ответ;

**10 баллов:** ответ верный, но есть ошибки в обосновании;

**5 баллов:** имеются разумные соображения, но решение не доведено до конца.

**Задача 5. 20 баллов:** правильное решение и правильный ответ;

**15 баллов:** правильный ответ, ошибка в округлении;

**10 баллов:** при идейно правильном решении допущены вычислительные ошибки;

**5 баллов:** верно найдено время движения.