**Олимпиада «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию – 2020/2021**

**7 – 8 классы**

**Критерии оценок задач:**

Каждая задача оценивается в **20 баллов**. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

**Решения задач варианта 21178.**

**Задача 1.** Два бегуна стартовали одновременно в одном направлении из одной точки круговой дистанции и первый бегун, уйдя вперед, снова догнал второго в тот момент времени, когда второй пробежал только полкруга. С этого момента второй бегун увеличил свою скорость в два раза. Догонит ли его теперь первый бегун? И если догонит, то сколько кругов успеет к этому моменту времени пробежать второй бегун?

**Решение.** Из первого условия задачи следует, что скорость первого бегуна в 3 раза больше скорости второго (так как он пробежал 3/2 круга, в то время как второй пробежал 1/2 круга), то есть $V_1 = 3V_2$. Поэтому после удвоения скорости второго бегуна, все равно первый будет двигаться быстрее. Значит, ответ на первый вопрос: да.

Пусть между первым и вторым обгоном второй бегун пробежит $k$ кругов. Тогда

$$kS = 2V_2 \cdot t, \qquad (k+1)S = V_1 \cdot t.$$

Отсюда $\dfrac{k+1}{k} = \dfrac{V_1}{2V_2} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow k = 2$.

**Ответ:** Догонит. Второй бегун с начала движения пробежит 2,5 круга

**Задача 2.** Бабушка испекла 19 блинов. Внуки пришли из школы и начали их есть. Пока младший внук съедает 1 блин, старший съедает 3 блина, а бабушка за это время успевает испечь еще 2 блина. Когда они закончили, на тарелке лежало 11 блинов. Сколько блинов съел старший внук?

**Решение.** За один «цикл» внуки съедают 1 + 3 = 4 блина, бабушка печет 2 блина, то есть количество блинов уменьшается на 2. Таких циклов будет (19 – 11)/2 = 4. Значит, за эти 4 цикла младший внук съел 4 блина, старший съел 12 блинов, а бабушка испекла за это время 8 блинов. Действительно, 19 + 8 – 4 – 12 = 11.

**Ответ:** 12.

**Задача 3.** Экспериментаторы Глафира и Гаврила разместили на белой плоской поверхности треугольник из тонкой проволоки со сторонами 30 мм, 40 мм, 50 мм. Эта проволока облеплена миллионами непонятных микроорганизмов. Ученые выяснили, что при подключении к проволоке электрического тока эти микроорганизмы начинают хаотичное движение на этой плоскости в разные стороны с примерной скоростью $\frac{1}{6}$ мм/сек. При этом вдоль траектории их движения плоскость окрашивается в красный цвет. Найдите площадь окрашенной поверхности через 1 минуту после подключения тока. Округлите ее до ближайшего целого числа квадратных миллиметров.

**Решение.** За минуту микроорганизм передвигается на 10 мм. Так как в прямоугольном треугольнике со сторонами 30, 40, 50 радиус вписанной окружности равен 10, то все точки внутри треугольника удалены от сторон треугольника на расстояние, не превышающее 10 мм. Значит, микроорганизмы заполнят всю внутренность треугольника.

При движении наружу будут достигаться точки, отстоящие от сторон треугольника на расстояние 10 мм, и точки, отстоящие от вершин на расстояние 10 мм.

В итоге суммарная занятая площадь есть: площадь треугольника + расположенные вне треугольника 3 полоски шириной 10 мм каждая с суммарной длиной, равной периметру треугольника + 3 круговых сектора радиуса 10, в сумме составляющие круг. Получаем:

$$\frac{30\cdot 40}{2}+10\cdot\left(30+40+50\right)+\pi\cdot 10^2 \; =600+1200+100\pi=1800+100\pi\approx 2114 \text{ мм}^2.$$

**Ответ:** $1800+100\pi\approx 2114$ мм$^2$.

**Задача 4.** Все ученики класса по результатам теста набрали разное количество баллов (целые положительные числа), совпадающих результатов нет. В сумме все они набрали 119 баллов. Сумма трех самых маленьких результатов – 23 балла, а трех самых больших – 49 баллов. Сколько учеников сдавали тест? Сколько баллов набрал победитель?

**Решение.** Обозначим все результаты в порядке возрастания $a_1, a_2, ..., a_n$, где $n$ – количество учеников. Так как $a_1+a_2+a_3=23$, $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=49$, то сумма чисел, стоящих между $a_3$ и $a_{n-2}$ равна 119 – 23 – 49 = 47.

Так как $a_1+a_2+a_3=23$, то $a_3\geq 9$ (иначе $a_1+a_2+a_3\leq 6+7+8<23$).

Так как $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n=49$, то $a_{n-2}\leq 15$ (иначе $a_{n-2}+a_{n-1}+a_n\geq 16+17+18>49$).

Значит, между $a_3$ и $a_{n-2}$ могут стоять только числа 10, 11, 12, 13, 14. Их сумма равна 60, а должна быть равна 47. Поэтому здесь есть все эти числа, кроме числа 13.

Получается последовательность $a_1, a_2$, 9, 10, 11, 12, 14, 15, $a_{n-1}, a_n$, в которой $a_1+a_2=14$, $a_{n-1}+a_n=34$. Значит, $n$ = 10, $a_1=6$, $a_2=8$, $a_{n-1}=16$, $a_n=18$.

**Ответ:** А) 10 учеников; Б) 18 баллов.

**Задача 5.** Электрочайник нагревает воду комнатной температуры $T_0 = 20°C$ до температуры $T_m = 100°C$ за $t = 10$ минут. За какой промежуток времени $t_1$ из чайника выкипит вся вода, если его не выключить из сети, а система автоматического отключения неисправна? Удельная теплоемкость воды $c = 4200$ Дж/кг · К. Удельная теплота парообразования воды $L = 2,3$ МДж/кг. Ответ округлить до целого числа минут.

**Решение**. Мощность $P$ чайника фиксирована и равна $P = Q/t$. Из закона теплопередачи $Q = cm(T_m - T_0)$ получим $Pt = cm(T_m - T_0)$.

Для того, чтобы испарить воду, необходимо количество теплоты $Q_1 = Lm \Rightarrow Pt_1 = Lm$.

Сопоставляя эти соотношения, получаем $\frac{t_1}{t} = \frac{Lm}{cm(T_m - T_0)} = \frac{L}{c(T_m - T_0)} \Rightarrow$

$$\frac{t_1}{t} = \frac{2,3 \cdot 10^6}{4200 \cdot 80} = \frac{2300}{336} \approx 6,845 .$$

Таким образом, вода выкипит за $t_1 = 6,845 \cdot t = 68,45$ минут.

**Ответ:** 68 минут.