**Олимпиада «ЛОМОНОСОВ» по механике и математическому моделированию – 2020/2021**

**10 – 11 классы**

**Критерии оценок задач:**

Каждая задача оценивается в **20 баллов**. Оценка 20 баллов ставится за правильное и полное решение задачи и правильный ответ.

За решение с различными недочетами (недостатки обоснования, неточности и т. д.) ставится 15 баллов. В некоторых задачах ставились также оценки 5 и 10 баллов за частичное продвижение в решении.

**Внимание!** ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***

**Решения задач варианта 211. Ответы ко всем вариантам.**

**Задача 1.** Робот-пылесос запрограммирован так, что он движется по полу по закону:

$$\begin{cases} x = t(t-6)^2, \\ y = 0,\ 0 \le t \le 7;\ y = (t-7)^2,\ t \ge 7, \end{cases}$$

где оси выбраны параллельно стенам и движение начинается из начала координат. Время $t$ измеряется в минутах, а координаты в метрах. Найдите пройденный роботом путь за первые 7 минут и модуль изменения вектора скорости за восьмую минуту.

**Решение.** Первые семь минут точка движется вдоль оси $x$. Скорость точки при $t \le 7$ равна $\dot{x} = 3(t-2)(t-6)$ и обращается в ноль в моменты времени $t_1 = 2$ и $t_2 = 6$. Тогда пройденный путь будет равен $L = x(7) + 2(x(2) - x(6)) = 7 + 2 \cdot 32 = 71$.

Вектор скорости $\bar{V}$ в каждый момент времени $t \ge 7$ определяется значениями своих проекций на оси координат $\bar{V}(\dot{x};\dot{y})$, где $\dot{y} = 2(t-7)$. Изменение скорости $\vartriangle\bar{V}$ за восьмую минуту определим через изменение проекций скорости $\vartriangle\bar{V} = \bar{V}(8) - \bar{V}(7) = (36;2) - (15;0) = (21;2)$.

Модуль вектора $\vartriangle\bar{V}$ равен $\sqrt{445}$.

**Ответ:** А) 71; Б) $\sqrt{445}$.

**Ответ к варианту 212**: А) 12; Б) $\sqrt{229}$.

**Задача 2.** Расстояния от лежащих в горизонтальной плоскости трех точек до основания телевизионной башни равны 800 м, 700 м и 500 м соответственно. Из каждой из этих трех точек башня видна (от основания до верхушки) под некоторым углом, при этом сумма этих трех углов равна $90°$. А) Найдите высоту телевизионной башни (в метрах). Б) Округлите ответ до ближайшего целого числа метров.

**Решение.** Обозначим заданные расстояния через $a$, $b$ и $c$, соответствующие углы – через $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, высоту башни – через $H$. Тогда $\mathrm{tg}\alpha = \frac{H}{a}$, $\mathrm{tg}\beta = \frac{H}{b}$, $\mathrm{tg}\gamma = \frac{H}{c}$. Так как $\frac{H}{c} = \mathrm{tg}\gamma$

$$= \mathrm{tg}\left(90° - (\alpha+\beta)\right) = \frac{1}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)} = \frac{1 - \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta} = \frac{1 - \frac{H}{a}\cdot\frac{H}{b}}{\frac{H}{a} + \frac{H}{b}}$$, то $\frac{H}{c}\left(\frac{H}{a}+\frac{H}{b}\right) = 1 - \frac{H}{a}\cdot\frac{H}{b} \Leftrightarrow$

$$\frac{H^2(a+b)}{abc} = \frac{ab - H^2}{ab} \Leftrightarrow H^2(a+b) = c\left(ab - H^2\right) \Leftrightarrow H^2(a+b+c) = abc \Leftrightarrow$$

$H = \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}$. При заданных числовых данных: $H = \sqrt{\frac{800\cdot500\cdot700}{800+500+700}}$

$$= \sqrt{\frac{800\cdot350}{2}} = \sqrt{140000} = 100\sqrt{14}.$$

Так как $374 = \sqrt{139876} < \sqrt{140000} < \sqrt{140250,25} = 374,5$, то $\sqrt{140000} \approx 374$.

Требуется строгое обоснование приближенного ответа (типа указанного выше или другого).

Заметим, что вывод вида «так как $140000 - 374^2 < 375^2 - 140000$, то $\sqrt{140000} \approx 374$» является необоснованным.

**Ответ:** А) $100\sqrt{14}$ м; Б) 374 м.

**Ответ к варианту 212**: А) $25\sqrt{35}$; Б) 148.

**Задача 3.** Все ученики класса по результатам теста набрали разное количество баллов (целые положительные числа), совпадающих результатов нет. В сумме все они набрали 119 баллов. Сумма трех самых маленьких результатов – 23 балла, а трех самых больших – 49 баллов. Сколько учеников сдавали тест? Сколько баллов набрал победитель?

**Решение.** Обозначим все результаты в порядке возрастания $a_1, a_2, ..., a_n$, где $n$ – количество учеников. Так как $a_1 + a_2 + a_3 = 23$, $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 49$, то сумма чисел, стоящих между $a_3$ и $a_{n-2}$ равна 119 – 23 – 49 = 47.

Так как $a_1 + a_2 + a_3 = 23$, то $a_3 \geq 9$ (иначе $a_1 + a_2 + a_3 \leq 6 + 7 + 8 < 23$).

Так как $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = 49$, то $a_{n-2} \leq 15$ (иначе $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n \geq 16 + 17 + 18 > 49$).

Значит, между $a_3$ и $a_{n-2}$ могут стоять только числа 10, 11, 12, 13, 14. Их сумма равна 60, а должна быть равна 47. Поэтому здесь есть все эти числа, кроме числа 13.

Получается последовательность $a_1, a_2$, 9, 10, 11, 12, 14, 15, $a_{n-1}, a_n$, в которой $a_1 + a_2 = 14$, $a_{n-1} + a_n = 34$. Значит, $n$ = 10, $a_1 = 6$, $a_2 = 8$, $a_{n-1} = 16$, $a_n = 18$.

Отметим, что недостаточно просто указать требуемый набор. Нужно доказательство единственности.

**Ответ:** А) 10 учеников; Б) 18 баллов.

**Ответ к варианту 212**: А) 10 участников; Б) 18 очков.

**Задача 4.** С одним молем идеального газа совершается замкнутый цикл, в котором:

1 – 2 – изобара, при этом объем увеличивается в 4 раза;

2 – 3 – изотерма, при этом давление увеличивается;

3 – 1 – процесс, в котором газ сжимается по закону $T = \gamma V^2$.

Найдите во сколько раз объем в состоянии 3 превосходит начальный объем в состоянии 1.

**Решение.** Начальный объем и давление обозначим как $(V_0; P_0)$. Далее $V_2 = 4V_0$.

Из закона Менделеева-Клапейрона следуют три соотношения:

$P_0V_0 = RT_1$, $P_0V_2 = RT$, $P_3V_3 = RT$.

Поделив третье соотношение на второе, получим: $\dfrac{P_3}{P_0} = \dfrac{V_2}{V_3}$.

Из зависимости температуры от объема в процессе 3 – 1 следует линейная связь между давлением и объемом: $P = \gamma V$. Тогда можно записать соотношение между параметрами, соответствующим состояниям 1 и 3: $\dfrac{P_3}{P_0} = \dfrac{V_3}{V_0}$.

Из полученных двух соотношений следует:

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_3}{V_0} \Rightarrow V_3^2 = V_2V_0 \Rightarrow V_3 = 2V_0.$$

**Ответ:** 2.

**Ответ к варианту 212**: 2.

**Задача 5.** Вертикальные колебания груза массы $m$ на пружине жесткости $k$ в вязкой среде описываются уравнением $x(t) = ae^{-2t} + be^{-t} + mg/k$, где $a$, $b$ – константы, зависящие от начальных условий, $t$ – время. В начальный момент времени груз вывели из состояния равновесия. При $mg/k = 1$ и $b = 1 - 2a$ найдите значения константы $a$, при которых в процессе движения пружина дважды окажется в нерастянутом состоянии ($x = 0$).

**Решение.** Замена $y = e^{-t}$ сводит задачу к следующей: найти значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $ay^2 + (1-2a)y + 1 = 0$ имеет два корня на интервале $(0; 1)$.

Условия этого:

$$D = 4a^2 - 8a + 1 \ge 0;\; af(0) = a > 0;\; af(1) = a(a + (1-2a) + 1) > 0;\; y_0 = \frac{2a-1}{2a} \in (0;1).$$

Отсюда получается ответ: $a \in \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\ 2\right)$.

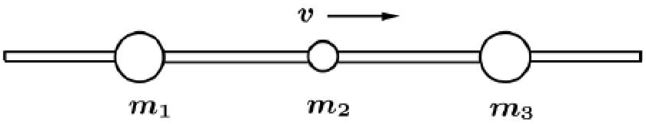
Ответ: $a \in \left(1+\frac{\sqrt{3}}{2};\ 2\right)$.

**Ответ к варианту 212**: $a \in \left(4+2\sqrt{3};\ +\infty\right)$.

**Задача 6.** Три бусинки массами $m_1 = 150$ г, $m_3 = 30$ г, $m_2 = 1$ г (см. рисунок) могут скользить вдоль горизонтальной спицы без трения.

Определите максимальные скорости больших бусинок, если в начальный момент времени они покоились, а маленькая бусинка двигалась со скоростью $V = 10$ м/с.

Удары считать абсолютно упругими.




**Решение.** После каждого соударения модуль скорости бусинки с массой $m_2$ уменьшается. После некоторого количества соударений ее скорость окажется недостаточной, чтобы догнать очередную бусинку $m_1$ или $m_3$. После такого последнего соударения скорости бусинок меняться не будут. Пусть $V_1$ и $V_3$ – модули скорости бусинок $m_1$ и $m_3$ соответственно, $V_2$ – проекция скорости бусинки $m_2$ на направление движения бусинки $m_3$ (после последнего соударения).

Согласно законам сохранения импульса и энергии получаем:

$$-m_1V_1 + m_2V_2 + m_3V_3 = m_2V\ , \qquad (1)$$

$$\frac{m_1V_1^2}{2} + \frac{m_2V_2^2}{2} + \frac{m_3V_3^2}{2} = \frac{m_2V^2}{2}. \qquad (2)$$

Так как, согласно условию задачи $m_2 \ll m_1$ и $m_2 \ll m_3$, то левых частях уравнений (1) и (2) можно пренебречь членами, содержащими $m_2$.

Действительно, если, например, после последнего соударения бусинка $m_2$ движется в направлении бусинки $m_1$, то $|V_2| \le V_1$ и поэтому $\frac{m_2|V_2|}{m_1V_1} \ll 1$, $\frac{m_2V_2^2}{m_1V_1^2} \ll 1$. Аналогично рассматривается ситуация, когда бусинка $m_2$ движется после последнего соударения в направлении бусинки $m_3$.

Таким образом, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -m_1V_1 + m_3V_3 = m_2V, \\ m_1V_1^2 + m_3V_3^2 = m_2V^2. \end{cases}$$

Обозначив $m_2 = m$, тогда $m_3 = nm$, $m_1 = 5nm$, где $n = 30$, запишем систему в виде:

$$\begin{cases} -5nV_1 + nV_3 = V, \\ 5nV_1^2 + nV_3^2 = V^2. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим

$$\frac{V_1}{V} = -\frac{1}{6n} + \sqrt{\frac{1}{30n} - \frac{5}{30^2 n^2}} \approx -\frac{1}{6n} + \sqrt{\frac{1}{30n}} = -\frac{1}{180} + \frac{1}{30} = \frac{1}{36};$$

$$\frac{V_3}{V} = \frac{1}{6n} + \sqrt{\frac{30}{36n} - \frac{5}{36n^2}} \approx \frac{1}{6n} + \sqrt{\frac{30}{36n}} = \frac{1}{180} + \frac{1}{6} = \frac{31}{180}.$$

**Ответ:** $V_1 \approx 0,28$ м/с; $V_3 \approx 1,72$ м/с.

**Ответ к варианту 212**: $V_1 \approx 0,28$ м/с; $V_3 \approx 1,72$ м/с.