Решения задач варианта 151.

1. Двигатели запущенной вертикально вверх с поверхности Земли ракеты, обеспечивающие ракете ускорение 20 м/с^2, через 40 секунд после старта внезапно прекратили работу. На какую максимальную высоту поднимется ракета? Может ли эта ракета представлять опасность для объекта, находящегося на высоте 45 км? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: а) 48 км; б) да. **Решение.** Пусть $a = 20$ м/с^2, $\tau = 40$ с. На первом участке движения, когда двигатели работали, скорость и набранная высота соответственно равны: $V = at$, $y = \frac{at^2}{2}$. Поэтому в момент прекращения работы двигателей: $V_0 = a\tau$, $y_0 = \frac{a\tau^2}{2}$ – это будет «нулевой» момент для второго участка.

На втором участке: $V = V_0 - gt = a\tau - gt$, $y = y_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \frac{gt^2}{2}$. На максимальной высоте $V = a\tau - gt = 0$, поэтому время, когда ракета будет на максимальной высоте, равно: $t = \frac{a\tau}{g}$. Значит, максимальная высота подъёма ракеты равна:

$y_{\max} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau\frac{a\tau}{g} - \frac{g}{2}\frac{a^2\tau^2}{g^2} = \frac{a\tau^2(g+a)}{2g}$. Подстановка чисел дает $y_{\max} = 48$ км.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ на оба вопроса; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе на первый вопрос, ответ на второй вопрос неверен или пропущен; **10 баллов**: правильные уравнения и правильная логика, но ответ неверен из-за арифметической ошибки; **5 баллов:** правильные уравнения и правильный ответ для случая, когда от ускорения на первом этапе отнимается g.

2. Передвижная железнодорожная платформа, имеющая горизонтальное днище в форме прямоугольника длиной 10 метров и шириной 5 метров, загружается зерном. Поверхность зерна имеет угол не более 45 градусов с плоскостью основания (иначе зернышки ссыпаются), плотность зерна равняется 1 200 кг/м^3. Найдите максимальную массу насыпанного на платформу зерна.

Ответ: 62,5 т. **Решение.** Расчет показывает, что максимальная высота зерновой кучи будет равна половине ширины платформы, то есть 2,5 м. Кучу можно разбить на «горизонтально лежащую вдоль платформы» призму (ее высота 5 м, а основание – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ и гипотенузой 5), и две одинаковых пирамиды в «торцах» платформы (в основании каждой из них лежит прямоугольник 5 х 2,5 и высота равна 2,5).

Суммарный объем равен $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}\cdot 5+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{125}{4}+\frac{125}{6}=\frac{125\cdot 5}{12}$ м^3. Поэтому масса равна $\frac{125\cdot 5}{12}\cdot 1200=62500$ кг.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ; **15 баллов**: при правильном в целом решении и правильном ответе имеются мелкие дефекты; **10 баллов**: правильное решение, но ответ неверен из-за арифметической ошибки.

3. Гаврила увидел в окно белку, севшую на ветку дерева прямо напротив него на расстоянии 3 м 75 см. Он решил покормить зверюшку и бросил орех горизонтально со скоростью 5 м/с прямо в направлении белки. Сможет ли белка поймать орех, если она умеет прыгать с большой скоростью в любом направлении на расстояние 1 м 80 см? Считать, что ускорение свободного падения равно $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: Да. **Решение:** Координаты белки в начальный момент: $x=a$; $y=0$. Орех движется по закону: $x(t)=V_0t$; $y(t)=\frac{gt^2}{2}$.

Поэтому квадрат расстояния от сидящей белки до летящего ореха в момент времени t равен: $r^2=(V_0t-a)^2+\left(\frac{gt^2}{2}\right)^2=\frac{g^2t^4}{4}+V_0^2t^2-2V_0at+a^2$. Подставляя числовые значения, получаем: $r^2=25t^4+25t^2-\frac{75}{2}t+\frac{225}{16}=\frac{25}{16}\left(16t^4+16t^2-24t+9\right)$.

Приходим к минимизации функции $f(t)=16t^4+16t^2-24t+9$. Так как $f'(t)=64t^3+32t-24=8\left(8t^3+4t-3\right)$, то решаем уравнение $8t^3+4t-3=0$. Так как $8t^3+4t-3$ $=(2t-1)\left(4t^2+2t+3\right)$ и уравнение $4t^2+2t+3=0$ действительных корней не имеет, то уравнение $8t^3+4t-3=0$ имеет единственный корень $t=\frac{1}{2}$. Это будет точка минимума функции $f(t)=16t^4+16t^2-24t+9$, так как производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс.

Поэтому $\left(r^2\right)_{\min}=\frac{25}{16}\left(\frac{16}{16}+\frac{16}{4}-\frac{24}{2}+9\right)=\frac{25\cdot 2}{16}$, и $r_{\min}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (м).

Нужно сравнить это число с $1{,}8=\frac{9}{5}$. Так как $\frac{5\sqrt{2}}{4}<\frac{9}{5}\Leftrightarrow 25\sqrt{2}<36\Leftrightarrow 25<18\sqrt{2}\Leftrightarrow$ $625<324\cdot 2$, то орех будет достижим для белки.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение, правильное значение минимального расстояния и правильный ответ на вопрос; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе имеются дефекты; например: найден корень кубического уравнения, но не доказано, что нет других корней; найден нуль производной, но не доказано, что это точка минимума; некорректно проведено сравнение чисел в конце и т. п.; **10 баллов**: правильный ход решения задачи, но ответ неверен из-за вычислительных ошибок; **5 баллов:** правильное начало решения, получено уравнение четвертой степени и правильно получена производная (по *t* или по *x*), но ее нули не найдены или найдены неверно.

4. **Условие** Один моль идеального совершает циклический процесс, который в переменных P, T описывается уравнением

$$\left(\frac{P}{P_0}-a\right)^2+\left(\frac{T}{T_0}-b\right)^2=c^2,$$

где P_0, T_0, a, b, c — некоторые константы, $c^2<a^2+b^2$. Определите максимальный объем, который занимает газ.

Ответ: $V_{max}=\dfrac{RT_0}{P_0}\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$

Решение В осях $P/P_0, T/T_0$ процесс изображается окружностью с центром в точке (a,b) и радиусом c. Для каждой точки объем, занимаемый газом есть $R\frac{T}{P}$, то есть пропорционален тангенсу угла наклона прямой, соединяющей данную точку с началом координат. Ясно, что экстремальные значения достигаются, если эта прямая является касательной. Из геометрических соображений

$$\left(\frac{T/T_0}{P/P_0}\right)_{max}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac},$$

то есть

$$V_{max}=\frac{RT_0}{P_0}\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$$

Критерии:

1. Верно выписано выражение для искомой величины как функции какой-нибудь переменной, например, $V(T)$ или указано, как эту величину найти из геометрических соображений - 5 баллов

2. П. 1 + указано, при каком значении параметра достигается экстремум (через производную или геометрически), но значение экстремума не вычислено - 10 баллов

3. Получено верное выражение для экстремума, но сделаны ошибки в преобразованиях, или не до конца вычислены тригонометрические функции - 15 баллов

5. **Условие**: Два невесомых цилиндрических катка лежат на горизонтальной поверхности параллельно другу другу и имеют радиусы $R = 1{,}25$ м и $r = 75$ см. На них положена плоская тяжелая плита массы $m = 100$ кг так, что она имеет наклон к горизонту $\alpha = \arccos(0,92)$. Найдите величину и направление ускорения плиты до того момента, как она коснется земли, если проскальзывания нет. С каким ускорением двигаются катки? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Ответ: 2 м/с; arcsin0,2;

Решение: Перейдем в систему координат, где центр (левого) колеса покоится. В этой системе все точки обода движутся с одинаковой скоростью v. То есть поверхность движется горизонтально влево с этой скоростью. И точка соприкосновения с плитой так же имеет эту скорость, но направлена она под углом α к горизонту вправо.

Ту же скорость v имеет и точка соприкосновения второго колеса с поверхностью. В этой системе координат центр колеса так же покоится и точка соприкосновения с плитой движется под углом α вправо. То есть, плита движется вдоль себя (но только в этой системе координат!)

В абсолютной системе координат, связанной с поверхностью, ко всем скоростям мы должны добавить горизонтальную скорость v. Значит, плита движется поступательно вправо под углом $\alpha/2$ со скоростью $2v\cos(\alpha/2)$. Движение поступательное, прямолинейное (угол не зависит от скорости).

Далее, из закона сохранения энергии: если плита опустилась на h — из закона сохранения энергии она приобретет скорость $\sqrt{2gh}$. Но, поскольку её перемещение за это время равно $h/\sin(\alpha/2)$, из соответствующей формулы кинематики ($2as=v^2$), еӵ ускорение равно $a=g\sin(\alpha/2)$.

Поскольку в условии дан арккосинус α, ответ можно записать так: $a=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Критерии:

1. Если понято, что движение плоскопараллельное. — 5 баллов
2. П. 1 + Получен угол $\alpha/2$ — 10 баллов
3. Найдено ускорение плиты — 15 баллов

6. **Условие**: Для орошения своего участка некий фермер создал систему каналов $ABCDEFGH$, изображенную на рисунке. Все каналы одинаковы и их соединение происходит в узлах, обозначенных буквами B, D и G. Вода поступает в узел A и выходит из узла E. Назовем расходом количество кубометров воды, протекающее через сечение канала за единицу времени.

Фермер обнаружил, что при перемещении по каналам из одной точки A, B, C, D, E, F, G или H в любую другую сумма расходов одинакова и не зависит от формы пути (С учётом знака — если мы движемся против течения, то расход вычитается).

Оказалось, что расход в канале BC равен q_0. Найдите расход в канале AB, в канале AH и общий расход воды, поступающий в узел A.

Ответ: $2q_0$, $\frac{3}{2}q_0$, $\frac{7}{2}q_0$

Решение: Сначала, в силу симметрии заметим, что расход в канале CD также равен q_0. Обозначим расход в канале BG и симметричном ему GD за x. Тогда суммарный расход по пути BCD равен расходу по пути BGD: $2q_0 = 2x$. Следовательно, $x = q_0$.

Далее, поскольку вода в эти каналы поступает из AB, расход в канале AB равен $2q_0$.

Искомый расход q в канале AH равен расходу в канале HG (в силу одинаковости этих каналов). По пути AHG сумма расходов получается равной $2q$, а по пути ABG — равной $3q_0$. Откуда получаем, что $q = \frac{3}{2}q_0$

Расход воды, поступающий в узел A расходится по каналам AB и AH. Значит общий расход воды равен $2q_0 + \frac{3}{2}q_0 = \frac{7}{2}q_0$

Критерии:
1. Понят закон сложения расходов по разным каналам — 5 баллов
2. П. 1 + рассуждения симметрии — 10 баллов
3. Проведен окончательный рассчет, но с ошибкой — 15 баллов

Решения задач варианта 152.

1. Двигатели запущенной вертикально вверх с поверхности Земли ракеты, обеспечивающие ракете ускорение 30 м/с^2, через 30 секунд после старта внезапно прекратили работу. На какую максимальную высоту поднимется ракета? Может ли эта ракета представлять опасность для объекта, находящегося на высоте 50 км? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: а) 54 км; б) да. **Решение.** Пусть $a = 30$ м/с^2, $\tau = 30$ с. На первом участке движения, когда двигатели работали, скорость и набранная высота соответственно равны: $V = at$, $y = \frac{at^2}{2}$.

Поэтому в момент прекращения работы двигателей: $V_0 = a\tau$, $y_0 = \frac{a\tau^2}{2}$ – это будет «нулевой» момент для второго участка.

На втором участке: $V = V_0 - gt = a\tau - gt$, $y = y_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \frac{gt^2}{2}$. На максимальной высоте $V = a\tau - gt = 0$, поэтому время, когда ракета будет на максимальной высоте, равно: $t = \frac{a\tau}{g}$. Значит, максимальная высота подъёма ракеты равна:

$y_{\max} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau\frac{a\tau}{g} - \frac{g}{2}\frac{a^2\tau^2}{g^2} = \frac{a\tau^2\left(g+a\right)}{2g}$. Подстановка чисел дает $y_{\max} = 54$ км.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ на оба вопроса; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе на первый вопрос, ответ на второй вопрос неверен или пропущен; **10 баллов**: правильные уравнения и правильная логика, но ответ неверен из-за арифметической ошибки; **5 баллов:** правильные уравнения и правильный ответ для случая, когда от ускорения на первом этапе отнимается g.

2. Передвижная железнодорожная платформа, имеющая горизонтальное днище в форме прямоугольника длиной 10 метров и шириной 4 метра, загружается песком. Поверхность песка имеет угол не более 45 градусов с плоскостью основания (иначе песчинки ссыпаются), плотность песка равняется 1 500 кг/м^3. Найдите максимальную массу насыпанного на платформу песка.

Ответ: 52 т. **Решение.** Расчет показывает, что максимальная высота песчаной кучи будет равна половине ширины платформы, то есть 2 м. Кучу можно разбить на «горизонтально лежащую вдоль платформы» призму (ее высота 6 м, а основание – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $2\sqrt{2}$ и гипотенузой 4), и две одинаковых пирамиды в «торцах» платформы (в основании каждой из них лежит прямоугольник 4 х 2 и высота равна 2).

Суммарный объем равен $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot 6+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2\cdot 2 \ =24+\frac{32}{3}=\frac{104}{3}$ м^3. Поэтому масса равна $\frac{104}{3}\cdot 1500=52000$ кг.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ; **15 баллов**: при правильном в целом решении и правильном ответе имеются мелкие дефекты; **10 баллов**: правильное решение, но ответ неверен из-за арифметической ошибки.

3. Гаврила увидел в окно белку, севшую на ветку дерева прямо напротив него на расстоянии 3 м 75 см. Он решил покормить зверюшку и бросил орех горизонтально со скоростью 2,5 м/с прямо в направлении белки. Сможет ли белка поймать орех, если она умеет прыгать с большой скоростью в любом направлении на расстояние 2 м 70 см? Считать, что ускорение свободного падения равно $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: Нет. **Решение:** Координаты белки в начальный момент: $x=a$; $y=0$. Орех движется по закону: $x(t)=V_0t$; $y(t)=\frac{gt^2}{2}$.

Поэтому квадрат расстояния от сидящей белки до летящего ореха в момент времени t равен: $r^2=(V_0t-a)^2+\left(\frac{gt^2}{2}\right)^2 \ =\frac{g^2t^4}{4}+V_0^2t^2-2V_0at+a^2$. Подставляя числовые значения, получаем: $r^2=25t^4+\frac{25}{4}t^2-\frac{75}{4}t+\frac{225}{16}$ $r^2=\frac{25}{16}\left(16t^4+4t^2-12t+9\right)$.

Приходим к минимизации функции $f(t)=16t^4+4t^2-12t+9$. Так как $f'(t)=64t^3+8t-12=4\left(16t^3+2t-3\right)$, то решаем уравнение $16t^3+2t-3=0$. Так как $16t^3+2t-3=0 \ =(2t-1)\left(8t^2+4t+3\right)$ и уравнение $8t^2+4t+3=0$ действительных корней не имеет, то уравнение $16t^3+2t-3=0$ имеет единственный корень $t=\frac{1}{2}$. Это будет точка минимума функции $f(t)=16t^4+4t^2-12t+9$, так как производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс.

Поэтому $\left(r^2\right)_{\min}=\frac{25}{16}\left(\frac{16}{16}+\frac{4}{4}-6+9\right) \ =\frac{25\cdot 5}{16}$, и $r_{\min}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$ (м).

Нужно сравнить это число с $2,7=\frac{27}{10}$. Так как $\frac{5\sqrt{5}}{4}>\frac{27}{10} \Leftrightarrow 25\sqrt{5}>54 \Leftrightarrow 625\cdot 5>54\cdot 54 \Leftrightarrow 3125>2916$, то орех будет недостижим для белки.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение, правильное значение минимального расстояния и правильный ответ на вопрос; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе имеются дефекты; например: найден корень кубического уравнения, но не доказано, что нет других корней; найден нуль производной, но не доказано, что это точка минимума; некорректно проведено сравнение чисел в конце и т. п.; **10 баллов**: правильный ход решения задачи, но ответ неверен из-за вычислительных ошибок; **5 баллов:** правильное начало решения, получено уравнение четвертой степени и правильно получена производная (по *t* или по *x*), но ее нули не найдены или найдены неверно.

Вариант 152

4. **Условие** Один моль идеального совершает циклический процесс, который в переменных T, V описывается уравнением

$$\left(\frac{V}{V_0}-a\right)^2+\left(\frac{T}{T_0}-b\right)^2=c^2,$$

где V_0, T_0, a, b, c — некоторые константы, $c^2<a^2+b^2$. Определите максимальное давление газа в этом процессе.

Ответ: $P_{max}=\dfrac{RT_0}{V_0}\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$

Решение В осях $P/P_0, T/T_0$ процесс изображается окружностью с центром в точке (a, b) и радиусом c. Для каждой точки объем, занимаемый газом есть $R\frac{T}{P}$, то есть пропорционален тангенсу угла наклона прямой, соединяющей данную точку с началом координат. Ясно, что экстремальные значения достигаются, если эта прямая является касательной. Из геометрических соображений

$$\left(\frac{T/T_0}{P/P_0}\right)_{max}=\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac},$$

то есть

$$V_{max}=\frac{RT_0}{P_0}\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$$

Критерии:

1. Верно выписано выражение для искомой величины как функции какой-нибудь переменной, например, $V(T)$ или указано, как эту величину найти из геометрических соображений - 5 баллов
2. П. 1 + указано, при каком значении параметра достигается экстремум (через производную или геометрически), но значение экстремума не вычислено - 10 баллов
3. Получено верное выражение для экстремума, но сделаны ошибки в преобразованиях, или не до конца вычислены тригонометрические функции - 15 баллов

5. **Условие**: Два невесомых цилиндрических катка лежат на горизонтальной поверхности параллельно друг другу и имеют радиусы $R = 1$ м и $r = 40$ см. На них положена плоская тяжелая плита массы $m = 150$ кг так, что она имеет наклон к горизонту $\alpha = \arccos(0,68)$. Найдите величину и направление ускорения плиты до того момента, как она коснется земли, если проскальзывания нет. С каким ускорением двигаются катки? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Ответ: 4 м/с; arcsin0,4

Решение: Перейдем в систему координат, где центр (левого) колеса покоится. В этой системе все точки обода движутся с одинаковой скоростью v. То есть поверхность движется горизонтально влево с этой скоростью. И точка соприкосновения с плитой так же имеет эту скорость, но направлена она под углом α к горизонту вправо.

Ту же скорость v имеет и точка соприкосновения второго колеса с поверхностью. В этой системе координат центр колеса так же покоится и точка соприкосновения с плитой движется под углом α вправо. То есть, плита движется вдоль себя (но только в этой системе координат!)

В абсолютной системе координат, связанной с поверхностью, ко всем скоростям мы должны добавить горизонтальную скорость v. Значит, плита движется поступательно вправо под углом $\alpha/2$ со скоростью $2v\cos(\alpha/2)$. Движение поступательное, прямолинейное (угол не зависит от скорости).

Далее, из закона сохранения энергии: если плита опустилась на h — из закона сохранения энергии она приобретет скорость $\sqrt{2gh}$. Но, поскольку её перемещение за это время равно $h/\sin(\alpha/2)$, из соответствующей формулы кинематики ($2as = v^2$), её ускорение равно $a = g\sin(\alpha/2)$.

Поскольку в условии дан арккосинус α, ответ можно записать так: $a=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Критерии:

1. Если понято, что движение плоскопараллельное. — 5 баллов
2. П. 1 + Получен угол $\alpha/2$ — 10 баллов
3. Найдено ускорение плиты — 15 баллов

6. **Условие**: Для орошения своего участка некий фермер создал систему каналов $ABCDEFGH$, изображенную на рисунке. Все каналы одинаковы и их соединение происходит в узлах, обозначенных буквами B, D и G. Вода поступает в узел A и выходит из узла E. Назовем расходом количество кубометров воды, протекающее через сечение канала за единицу времени.

Фермер обнаружил, что при перемещении по каналам из одной точки A, B, C, D, E, F, G или H в любую другую сумма расходов одинакова и не зависит от формы пути (С учётом знака — если мы движемся против течения, то расход вычитается).

Оказалось, что расход в канале AH равен q_0. Найдите расход в канале AB, в канале BC и общий расход воды, поступающий в узел A.

Ответ: $\frac{4}{3}q_0$, $\frac{2}{3}q_0$, $\frac{7}{3}q_0$

Решение: Сначала, в силу симметрии заметим, что расход в канале HG также равен q_0. Обозначим расход в канале BC и симметричном ему CD за x, а в канале BG и симметричном ему GD за y.

Тогда суммарный расход по пути BCD равен расходу по пути BGD: $2x = 2y$. Следовательно, $x = y$.

По пути AHG сумма расходов получается равной $2q_0$, а по пути ABG — равной $3x$. Откуда получаем, что $x = \frac{2}{3}q_0$

Расход воды, поступающий в узел A расходится по каналам AB и AH. Значит общий расход воды равен $q_0 + \frac{4}{3}q_0 = \frac{7}{3}q_0$

Критерии:

1. Понят закон сложения расходов по разным каналам — 5 баллов
2. П. 1 + рассуждения симметрии — 10 баллов
3. Проведен окончательный рассчет, но с ошибкой — 15 баллов

Решения задач варианта 153.

1. Двигатели запущенной вертикально вверх с поверхности Земли ракеты, обеспечивающие ракете ускорение 20 м/с^2, через 50 секунд после старта внезапно прекратили работу. На какую максимальную высоту поднимется ракета? Может ли эта ракета представлять опасность для объекта, находящегося на высоте 70 км? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: а) 75 км; б) да. **Решение.** Пусть $a = 20$ м/с^2, $\tau = 50$ с. На первом участке движения, когда двигатели работали, скорость и набранная высота соответственно равны: $V = at$, $y = \frac{at^2}{2}$.

Поэтому в момент прекращения работы двигателей: $V_0 = a\tau$, $y_0 = \frac{a\tau^2}{2}$ – это будет «нулевой» момент для второго участка.

На втором участке: $V = V_0 - gt = a\tau - gt$, $y = y_0 + V_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \frac{gt^2}{2}$. На максимальной высоте $V = a\tau - gt = 0$, поэтому время, когда ракета будет на максимальной высоте, равно: $t = \frac{a\tau}{g}$. Значит, максимальная высота подъёма ракеты равна:

$y_{\max} = \frac{a\tau^2}{2} + a\tau\frac{a\tau}{g} - \frac{g}{2}\frac{a^2\tau^2}{g^2} = \frac{a\tau^2(g+a)}{2g}$. Подстановка чисел дает $y_{\max} = 75$ км.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ на оба вопроса; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе на первый вопрос, ответ на второй вопрос неверен или пропущен; **10 баллов**: правильные уравнения и правильная логика, но ответ неверен из-за арифметической ошибки; **5 баллов:** правильные уравнения и правильный ответ для случая, когда от ускорения на первом этапе отнимается g.

2. Передвижная железнодорожная платформа, имеющая горизонтальное днище в форме прямоугольника длиной 8 метров и шириной 5 метров, загружается зерном. Поверхность зерна имеет угол не более 45 градусов с плоскостью основания (иначе зернышки ссыпаются), плотность зерна равняется 1 200 кг/м^3. Найдите максимальную массу насыпанного на платформу зерна.

Ответ: 47,5 т. **Решение.** Расчет показывает, что максимальная высота зерновой кучи будет равна половине ширины платформы, то есть 2,5 м. Кучу можно разбить на «горизонтально лежащую вдоль платформы» призму (ее высота 3 м, а основание – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ и гипотенузой 5), и две одинаковых пирамиды в «торцах» платформы (в основании каждой из них лежит прямоугольник 5 х 2,5 и высота равна 2,5).

Суммарный объем равен $\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}\cdot 3+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 5\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{75}{4}+\frac{125}{6}=\frac{25\cdot 19}{12}$ м^3. Поэтому масса равна $\frac{25\cdot 19}{12}\cdot 1200=47500$ кг.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ; **15 баллов**: при правильном в целом решении и правильном ответе имеются мелкие дефекты; **10 баллов**: правильное решение, но ответ неверен из-за арифметической ошибки.

3. Гаврила увидел в окно белку, севшую на ветку дерева прямо напротив него на расстоянии 3 м 75 см. Он решил покормить зверюшку и бросил орех горизонтально со скоростью 5 м/с прямо в направлении белки. Сможет ли белка поймать орех, если она умеет прыгать с большой скоростью в любом направлении на расстояние 1 м 70 см? Считать, что ускорение свободного падения равно $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: Нет. **Решение:** Координаты белки в начальный момент: $x=a$; $y=0$. Орех движется по закону: $x(t)=V_0t$; $y(t)=\frac{gt^2}{2}$. Поэтому квадрат расстояния от сидящей белки до летящего ореха в момент времени *t* равен: $r^2=(V_0t-a)^2+\left(\frac{gt^2}{2}\right)^2=\frac{g^2t^4}{4}+V_0^2t^2-2V_0at+a^2$.

Подставляя числовые значения, получаем: $r^2=25t^4+25t^2-\frac{75}{2}t+\frac{225}{16}=\frac{25}{16}\left(16t^4+16t^2-24t+9\right)$.

Приходим к минимизации функции $f(t)=16t^4+16t^2-24t+9$. Так как $f'(t)=64t^3+32t-24=8\left(8t^3+4t-3\right)$, то решаем уравнение $8t^3+4t-3=0$. Так как $8t^3+4t-3$ $=(2t-1)\left(4t^2+2t+3\right)$ и уравнение $4t^2+2t+3=0$ действительных корней не имеет, то уравнение $8t^3+4t-3=0$ имеет единственный корень $t=\frac{1}{2}$. Это будет точка минимума функции $f(t)=16t^4+16t^2-24t+9$, так как производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс.

Поэтому $\left(r^2\right)_{\min}=\frac{25}{16}\left(\frac{16}{16}+\frac{16}{4}-\frac{24}{2}+9\right)=\frac{25\cdot 2}{16}$, и $r_{\min}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ (м).

Нужно сравнить это число с $1,7=\frac{17}{10}$. Так как $\frac{5\sqrt{2}}{4}>\frac{17}{10}\Leftrightarrow 25\sqrt{2}>34\Leftrightarrow 25>17\sqrt{2}\Leftrightarrow$ $625>289\cdot 2$, то орех будет недостижим для белки.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение, правильное значение минимального расстояния и правильный ответ на вопрос; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе имеются дефекты; например: найден корень кубического уравнения, но не доказано, что нет других корней; найден нуль производной, но не доказано, что это точка минимума; некорректно проведено сравнение чисел в конце и т. п.; **10 баллов**: правильный ход решения задачи, но ответ неверен из-за вычислительных ошибок; **5 баллов:** правильное начало решения, получено уравнение четвертой степени и правильно получена производная (по *t* или по *x*), но ее нули не найдены или найдены неверно.

4. **Условие** Один моль идеального совершает циклический процесс, который в переменных P, T описывается уравнением

$$\left(\frac{P}{P_0} - a\right)^2 + \left(\frac{T}{T_0} - b\right)^2 = c^2,$$

где P_0, T_0, a, b, c — некоторые константы, $c^2 < a^2 + b^2$. Определите минимальный объем газа в этом процессе.

Ответ: $V_{min} = \dfrac{RT_0}{P_0}\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2} - bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2} + ac}$

Решение В осях $P/P_0, T/T_0$ процесс изображается окружностью с центром в точке (a, b) и радиусом c. Для каждой точки объем, занимаемый газом есть $R\frac{T}{P}$, то есть пропорционален тангенсу угла наклона прямой, соединяющей данную точку с началом координат. Ясно, что экстремальные значения достигаются, если эта прямая является касательной. Из геометрических соображений

$$\left(\frac{T/T_0}{P/P_0}\right)_{max} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2} + bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2} - ac},$$

то есть

$$V_{max} = \frac{RT_0}{P_0}\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2} + bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2} - ac}$$

Критерии:

1. Верно выписано выражение для искомой величины как функции какой-нибудь переменной, например, $V(T)$ или указано, как эту величину найти из геометрических соображений - 5 баллов
2. П. 1 + указано, при каком значении параметра достигается экстремум (через производную или геометрически), но значение экстремума не вычислено - 10 баллов
3. Получено верное выражение для экстремума, но сделаны ошибки в преобразованиях, или не до конца вычислены тригонометрические функции - 15 баллов

5. **Условие**: Два невесомых цилиндрических катка лежат на горизонтальной поверхности параллельно друг другу и имеют радиусы $R = 1$ м и $r = 75$ см. На них положена плоская тяжелая плита массы $m = 75$ кг так, что она имеет наклон к горизонту $\alpha = \arccos(0,98)$. Найдите величину и направление ускорения плиты до того момента, как она коснется земли, если проскальзывания нет. С каким ускорением двигаются катки? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Ответ: 1 м/с; arcsin0,1;

Решение: Перейдем в систему координат, где центр (левого) колеса покоится. В этой системе все точки обода движутся с одинаковой скоростью v. То есть поверхность движется горизонтально влево с этой скоростью. И точка соприкосновения с плитой так же имеет эту скорость, но направлена она под углом α к горизонту вправо.

Ту же скорость v имеет и точка соприкосновения второго колеса с поверхностью. В этой системе координат центр колеса так же покоится и точка соприкосновения с плитой движется под углом α вправо. То есть, плита движется вдоль себя (но только в этой системе координат!)

В абсолютной системе координат, связанной с поверхностью, ко всем скоростям мы должны добавить горизонтальную скорость v. Значит, плита движется поступательно вправо под углом $\alpha/2$ со скоростью $2v\cos(\alpha/2)$. Движение поступательное, прямолинейное (угол не зависит от скорости).

Далее, из закона сохранения энергии: если плита опустилась на h — из закона сохранения энергии она приобретет скорость $\sqrt{2gh}$. Но, поскольку её перемещение за это время равно $h/\sin(\alpha/2)$, из соответствующей формулы кинематики ($2as = v^2$), еӵ ускорение равно $a = g\sin(\alpha/2)$.

Поскольку в условии дан арккосинус α, ответ можно записать так: $a = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Критерии:

1. Если понято, что движение плоскопараллельное. — 5 баллов
2. П. 1 + Получен угол $\alpha/2$ — 10 баллов
3. Найдено ускорение плиты — 15 баллов

6. **Условие**: Для орошения своего участка некий фермер создал систему каналов $ABCDEFGH$, изображенную на рисунке. Все каналы одинаковы и их соединение происходит в узлах, обозначенных буквами B, D и G. Вода поступает в узел A и выходит из узла E. Назовем расходом количество кубометров воды, протекающее через сечение канала за единицу времени.

Фермер обнаружил, что при перемещении по каналам из одной точки A, B, C, D, E, F, G или H в любую другую сумма расходов одинакова и не зависит от формы пути (С учётом знака — если мы движемся против течения, то расход вычитается).

Оказалось, что расход в канале BC равен q_0. Найдите расход в канале AB, в канале AH и общий расход воды, поступающий в узел A.

Ответ: $\frac{1}{2}q_0$, $\frac{3}{4}q_0$, $\frac{7}{4}q_0$

Решение: Обозначим расход в канале BC за x. Заметим, в силу симметрии, что расход в канале CD также равен x. Обозначим расход в канале BG и симметричном ему GD за y. Тогда суммарный расход по пути BCD равен расходу по пути BGD: $2x = 2y$. Следовательно, $x = y$.

Далее, поскольку вода в эти каналы поступает из AB, $x = \frac{1}{2}q_0$.

Искомый расход q в канале AH равен расходу в канале HG (в силу одинаковости этих каналов). По пути AHG сумма расходов получается равной $2q$, а по пути ABG — равной $\frac{3}{2}q_0$. Откуда получаем, что $q = \frac{3}{4}q_0$

Расход воды, поступающий в узел A расходится по каналам AB и AH. Значит общий расход воды равен $q_0 + \frac{3}{4}q_0 = \frac{7}{4}q_0$

Критерии:

1. Понят закон сложения расходов по разным каналам — 5 баллов
2. П. 1 + рассуждения симметрии — 10 баллов
3. Проведен окончательный рассчет, но с ошибкой — 15 баллов

Решения задач варианта 154.

1. Двигатели запущенной вертикально вверх с поверхности Земли ракеты, обеспечивающие ракете ускорение 30 м/с^2, через 20 секунд после старта внезапно прекратили работу. На какую максимальную высоту поднимется ракета? Может ли эта ракета представлять опасность для объекта, находящегося на высоте 20 км? Сопротивление воздуха не учитывать, ускорение свободного падения считать равным 10 м/с^2.

Ответ: а) 24 км; б) да. **Решение.** Пусть $a = 30$ м/с^2, $\tau = 20$ с. На первом участке движения, когда двигатели работали, скорость и набранная высота соответственно равны: $V = at$, $y = \dfrac{at^2}{2}$. Поэтому в момент прекращения работы двигателей: $V_0 = a\tau$, $y_0 = \dfrac{a\tau^2}{2}$ – это будет «нулевой» момент для второго участка.

На втором участке: $V = V_0 - gt = a\tau - gt$, $y = y_0 + V_0 t - \dfrac{gt^2}{2} = \dfrac{a\tau^2}{2} + a\tau t - \dfrac{gt^2}{2}$. На максимальной высоте $V = a\tau - gt = 0$, поэтому время, когда ракета будет на максимальной высоте, равно: $t = \dfrac{a\tau}{g}$. Значит, максимальная высота подъёма ракеты равна:

$y_{\max} = \dfrac{a\tau^2}{2} + a\tau\dfrac{a\tau}{g} - \dfrac{g}{2}\dfrac{a^2\tau^2}{g^2} = \dfrac{a\tau^2(g+a)}{2g}$. Подстановка чисел дает $y_{\max} = 24$ км.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ на оба вопроса; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе на первый вопрос, ответ на второй вопрос неверен или пропущен; **10 баллов**: правильные уравнения и правильная логика, но ответ неверен из-за арифметической ошибки; **5 баллов:** правильные уравнения и правильный ответ для случая, когда от ускорения на первом этапе отнимается g.

2. Передвижная железнодорожная платформа, имеющая горизонтальное днище в форме прямоугольника длиной 8 метров и шириной 4 метра, загружается песком. Поверхность песка имеет угол не более 45 градусов с плоскостью основания (иначе песчинки ссыпаются), плотность песка равняется 1 500 кг/м^3. Найдите максимальную массу насыпанного на платформу песка.

Ответ: 40 т. **Решение.** Расчет показывает, что максимальная высота песчаной кучи будет равна половине ширины платформы, то есть 2 м. Кучу можно разбить на «горизонтально лежащую вдоль платформы» призму (ее высота 4 м, а основание – равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами $2\sqrt{2}$ и гипотенузой 4), и две одинаковых пирамиды в «торцах» платформы (в основании каждой из них лежит прямоугольник 4 x 2 и высота равна 2).

Суммарный объем равен $\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 2\cdot 4+2\cdot\frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2\cdot 2\ =16+\frac{32}{3}=\frac{80}{3}$ м^3. Поэтому масса равна $\frac{80}{3}\cdot 1500=40000$ кг.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение и правильный ответ; **15 баллов**: при правильном в целом решении и правильном ответе имеются мелкие дефекты; **10 баллов**: правильное решение, но ответ неверен из-за арифметической ошибки.

3. Гаврила увидел в окно белку, севшую на ветку дерева прямо напротив него на расстоянии 3 м 75 см. Он решил покормить зверюшку и бросил орех горизонтально со скоростью 2,5 м/с прямо в направлении белки. Сможет ли белка поймать орех, если она умеет прыгать с большой скоростью в любом направлении на расстояние 2 м 80 см? Считать, что ускорение свободного падения равно $g=10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

Ответ: Да. **Решение:** Координаты белки в начальный момент: $x=a$; $y=0$. Орех движется по закону: $x(t)=V_0t$; $y(t)=\frac{gt^2}{2}$.

Поэтому квадрат расстояния от сидящей белки до летящего ореха в момент времени t равен: $r^2=(V_0t-a)^2+\left(\frac{gt^2}{2}\right)^2\ =\frac{g^2t^4}{4}+V_0^2t^2-2V_0at+a^2$. Подставляя числовые значения, получаем: $r^2=25t^4+\frac{25}{4}t^2-\frac{75}{4}t+\frac{225}{16}\ \ r^2=\frac{25}{16}\left(16t^4+4t^2-12t+9\right)$.

Приходим к минимизации функции $f(t)=16t^4+4t^2-12t+9$. Так как $f'(t)=64t^3+8t-12=4\left(16t^3+2t-3\right)$, то решаем уравнение $16t^3+2t-3=0$. Так как $16t^3+2t-3=0\ =(2t-1)\left(8t^2+4t+3\right)$ и уравнение $8t^2+4t+3=0$ действительных корней не имеет, то уравнение $16t^3+2t-3=0$ имеет единственный корень $t=\frac{1}{2}$. Это будет точка минимума функции $f(t)=16t^4+4t^2-12t+9$, так как производная в этой точке меняет знак с минуса на плюс.

Поэтому $\left(r^2\right)_{\min}=\frac{25}{16}\left(\frac{16}{16}+\frac{4}{4}-6+9\right)\ =\frac{25\cdot 5}{16}$, и $r_{\min}=\frac{5\sqrt{5}}{4}$ (м).

Нужно сравнить это число с $2{,}8=\frac{14}{5}$. Так как $\frac{5\sqrt{5}}{4}<\frac{14}{5}\ \Leftrightarrow\ 25\sqrt{5}<56\ \Leftrightarrow\ 625\cdot 5<56\cdot 56$ $\Leftrightarrow\ 3125>3136$, то орех будет достижим для белки.

Критерии оценки: **20 баллов**: правильное решение, правильное значение минимального расстояния и правильный ответ на вопрос; **15 баллов**: при правильном решении и правильном ответе имеются дефекты; например: найден корень кубического уравнения, но не доказано, что нет других корней; найден нуль производной, но не доказано, что это точка минимума; некорректно проведено сравнение чисел в конце и т. п.; **10 баллов**: правильный ход решения задачи, но ответ неверен из-за вычислительных ошибок; **5 баллов:** правильное начало решения, получено уравнение четвертой степени и правильно получена производная (по t или по x), но ее нули не найдены или найдены неверно.

Вариант 154

4. **Условие** Один моль идеального совершает циклический процесс, который в переменных T, V описывается уравнением

$$\left(\frac{V}{V_0} - a\right)^2 + \left(\frac{T}{T_0} - b\right)^2 = c^2,$$

где V_0, T_0, a, b, c — некоторые константы, $c^2 < a^2 + b^2$. Определите минимальное давление газа в этом процессе.

Ответ: $P_{min} = \dfrac{RT_0}{V_0}\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}-bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}+ac}$

Решение В осях $P/P_0, T/T_0$ процесс изображается окружностью с центром в точке (a, b) и радиусом c. Для каждой точки объем, занимаемый газом есть $R\frac{T}{P}$, то есть пропорционален тангенсу угла наклона прямой, соединяющей данную точку с началом координат. Ясно, что экстремальные значения достигаются, если эта прямая является касательной. Из геометрических соображений

$$\left(\frac{T/T_0}{P/P_0}\right)_{max} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac},$$

то есть

$$V_{max} = \frac{RT_0}{P_0}\frac{a\sqrt{a^2+b^2-c^2}+bc}{b\sqrt{a^2+b^2-c^2}-ac}$$

Критерии:

1. Верно выписано выражение для искомой величины как функции какой-нибудь переменной, например, $V(T)$ или указано, как эту величину найти из геометрических соображений - 5 баллов
2. П. 1 + указано, при каком значении параметра достигается экстремум (через производную или геометрически), но значение экстремума не вычислено - 10 баллов
3. Получено верное выражение для экстремума, но сделаны ошибки в преобразованиях, или не до конца вычислены тригонометрические функции - 15 баллов

5. **Условие**: Два невесомых цилиндрических катка лежат на горизонтальной поверхности параллельно друг другу и имеют радиусы $R = 1$ м и $r = 50$ см. На них положена плоская тяжелая плита массы $m = 75$ кг так, что она имеет наклон к горизонту $\alpha = \arccos(0,82)$. Найдите величину и направление ускорения плиты до того момента, как она коснется земли, если проскальзывания нет. С каким ускорением двигаются катки? Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Ответ: 3 м/с; arcsin0,2.

Решение: Перейдем в систему координат, где центр (левого) колеса покоится. В этой системе все точки обода движутся с одинаковой скоростью v. То есть поверхность движется горизонтально влево с этой скоростью. И точка соприкосновения с плитой так же имеет эту скорость, но направлена она под углом α к горизонту вправо.

Ту же скорость v имеет и точка соприкосновения второго колеса с поверхностью. В этой системе координат центр колеса так же покоится и точка соприкосновения с плитой движется под углом α вправо. То есть, плита движется вдоль себя (но только в этой системе координат!)

В абсолютной системе координат, связанной с поверхностью, ко всем скоростям мы должны добавить горизонтальную скорость v. Значит, плита движется поступательно вправо под углом $\alpha/2$ со скоростью $2v\cos(\alpha/2)$. Движение поступательное, прямолинейное (угол не зависит от скорости).

Далее, из закона сохранения энергии: если плита опустилась на h — из закона сохранения энергии она приобретет скорость $\sqrt{2gh}$. Но, поскольку её перемещение за это время равно $h/\sin(\alpha/2)$, из соответствующей формулы кинематики ($2as = v^2$), еӵ ускорение равно $a = g\sin(\alpha/2)$.

Поскольку в условии дан арккосинус α, ответ можно записать так: $a = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

Критерии:

1. Если понято, что движение плоскопараллельное. — 5 баллов
2. П. 1 + Получен угол $\alpha/2$ — 10 баллов
3. Найдено ускорение плиты — 15 баллов

6. **Условие**: Для орошения своего участка некий фермер создал систему каналов $ABCDEFGH$, изображенную на рисунке. Все каналы одинаковы и их соединение происходит в узлах, обозначенных буквами B, D и G. Вода поступает в узел A и выходит из узла E. Назовем расходом количество кубометров воды, протекающее через сечение канала за единицу времени.

Фермер обнаружил, что при перемещении по каналам из одной точки A, B, C, D, E, F, G или H в любую другую сумма расходов одинакова и не зависит от формы пути (С учётом знака — если мы движемся против течения, то расход вычитается).

Оказалось, что общий расход воды, поступающий в узел A равен q_0. Найдите расход в каждом из каналов DE, BC и в GF.

Ответ: $\frac{4}{7}q_0$, $\frac{2}{7}q_0$, $\frac{3}{7}q_0$

Решение: Сначала, в силу симметрии заметим, что расход в канале BC равен расходу в канале CD (обозначим его за x), а расход в канале BG равен расходу в канале GD (его обозначим за y).

Тогда суммарный расход по пути BCD равен расходу по пути BGD: $2x = 2y$. Следовательно, $x = y$.

В канал DE уже попадает $2x$.

Обозначам расход в канале GF за q. Такой же расход в канале FE.

По пути GFE сумма расходов получается равной $2q$, а по пути GDE — равной $3x$. Откуда получаем, что $x = \frac{2}{3}q$. Значит, в канал DE попадает $2x = \frac{4}{3}q$

Расход воды, поступающий в узел E (а, значит, и в A) равен суммарному $q + \frac{4}{3}q = \frac{7}{3}q$, По условию задачи — это q_0 Значит, $q = \frac{3}{7}q_0$, а $x = \frac{2}{7}q_0$.

Критерии:

1. Понят закон сложения расходов по разным каналам — 5 баллов
2. П. 1 + рассуждения симметрии — 10 баллов
3. Проведен окончательный рассчет, но с ошибкой — 15 баллов