

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2013/2014 учебного года  
по механике и математическому моделированию**

**ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ**

**Заключительный этап**

**9 класс**

№1 Приборы показали, что юго-западный ветер дует под углом  $60^\circ$  к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ, так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

**Ответ:**  $36\sqrt{151} \approx 442$  км/ч.

**Решение.** Нужная скорость находится по теореме косинусов из треугольника скоростей с известными сторонами 36 км/ч (это 10 м/с) и 600 км/ч (это 900 км за 1,5 часа) и углом между ними  $60^\circ$ . Квадрат скорости получается равным  $36 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 151 = 195\,696$ , то есть скорость равна  $36\sqrt{151} = \sqrt{195\,696}$  км/ч. Для получения ближайшего целого нужно или уметь вычислять корни «в столбик», или, сделав «контрольные» возведения в квадрат, постепенно «подобраться» к ближайшему целому (примерно 5 минут вычислений в столбик). Приближенное значение (для контроля): 442,3754...

№2 Маленький брусок, начиная соскальзывать по наклонной плоскости с углом наклона  $\beta = 30^\circ$  к горизонту, через два метра пути приобретает скорость 2 м/с. Какую скорость приобретет брусок на той же дистанции, если эту же наклонную плоскость расположить под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту?

**Ответ:**  $\approx 5$  м/с.

**Решение.** Из условия задачи можно найти, с каким ускорением тело движется в первой ситуации:  $a_1 = \frac{v^2}{2S} = 1$  м/с. Тогда из второго закона ньютона  $g \sin \beta - \mu g \cos \beta = a_1$  определяется коэффициент трения. Теперь из второго закона ньютона во второй ситуации  $g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha = a_2$ . И теперь из кинематической связи ускорения и скорости находим скорость  $U = \sqrt{2a_2S}$ .

№3 Пешеход Петя, велосипедист Вася и мотоциклист Миша движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. Когда Петя и Вася находились в одной точке шоссе, Миша отставал от них на 8 км. Когда Миша догнал Петю, Вася был впереди на 6 км. На сколько километров Петя будет отставать от Миши, когда Миша догонит Васю?

**Ответ:** 24.

**Решение.** Рассмотрим движение в системе координат, связанной с пешеходом Петей. Миша проехал 8 км, а Вася за это же время – 6 км. Значит когда Вася проедет еще 18 км, Миша его догонит. И это произойдет на расстоянии 24 км от Пети.

№4 Два одинаковых призматических сосуда с квадратными основаниями со стороной  $4a$  и высотой  $10a$  наполовину заполнены водой плотности  $\rho_0$ . В каждый из сосудов положили по одному кубику. В первый сосуд положили пластиковый кубик плотности  $\rho_1 = \rho_0/4$  со стороной  $2a$ . Во второй --- деревянный  $\rho_1 = \rho_0/2$  со стороной  $a$ . На сколько процентов изменение уровня в первом сосуде больше изменения уровня воды во втором сосуде?

**Ответ:** 300%.

**Решение.** Уровень поднимется в первом сосуде на высоту  $a/8$ , во втором сосуде - на  $a/32$ . То есть ответ 300%

№ 5 В условиях предыдущей задачи сосуды с кубиками соединили тонкой трубкой. Какое количество воды при этом перетекло из одного сосуда в другой?

**Ответ:**  $3/4 a^3$ .

**Решение.** Разность уровней  $3a/32$ . При соединении сосудов получится среднее арифметическое. Из одного сосуда перетечет слой воды  $3a/64$ . Таким образом, перетечет объем  $3a/64 \times 16a^2 = 3/4 a^3$ . Но надо проверять, не окажется ли один из кубиков на дне. В этом случае уровни не выровнялись бы.