

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2013/2014 учебного года
по механике и математическому моделированию**

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заключительный этап

7-8 класс

№ 1 Пловец на дистанции 100 метров брассом проплыл первые 25 метров за некоторое время. На каждые следующие 25 метров он тратил на 10% времени больше, чем на предыдущие. В итоге его средняя скорость на дистанции оказалась равна 1 м/с. За сколько секунд он проплыл первую четверть дистанции? Ответ округлите до сотых по правилам округления.

Ответ: 21,55 с.

Решение. Если первую четверть дистанции спортсмен проплыл за t секунд, то на всю

дистанцию он потратит время $t \left(1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10}\right)^2 + \left(\frac{11}{10}\right)^3 \right) = t \frac{1 - \left(\frac{11}{10}\right)^4}{1 - \frac{11}{10}}$

$$= t \frac{11^4 - 10^4}{10^3} = t \frac{21 \cdot 221}{10^3}. \text{ Тогда } V_{cp.} = \frac{10^5}{21 \cdot 221 \cdot t}, \text{ и } t = \frac{10^5}{21 \cdot 221 \cdot V_{cp.}} = 21,54708... \text{ с.}$$

№ 2 Приборы показали, что юго-западный ветер дует под углом 60° к меридиану со скоростью 10 м/с. С какой собственной скоростью должен лететь самолет, чтобы за полтора часа пролететь в северном направлении вдоль меридиана 900 км? Дайте как точный ответ, так и ответ, округленный до ближайшего целого числа.

Ответ: $36\sqrt{151} \approx 442$ км/ч.

Решение. Нужная скорость находится по теореме косинусов из треугольника скоростей с известными сторонами 36 км/ч (это 10 м/с) и 600 км/ч (это 900 км за 1,5 часа) и углом между ними 60° . Квадрат скорости получается равным $36 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 151 = 195\,696$, то есть скорость равна $36\sqrt{151} = \sqrt{195696}$ км/ч. Для получения ближайшего целого нужно или уметь вычислять корни «в столбик», или, сделав «контрольные» возведения в квадрат, постепенно «подобраться» к ближайшему целому (примерно 5 минут вычислений в столбик).
Приближенное значение (для контроля): 442,3754...

№3 Пешеход Петя, велосипедист Вася и мотоциклист Миша движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. Когда Петя и Вася находились в одной точке шоссе, Миша отставал от них на 8 км. Когда Миша догнал Петю, Вася был впереди на 6 км. На сколько километров Петя будет отставать от Миши, когда Миша догонит Васю?

Ответ: 24.

Решение. Рассмотрим движение в системе координат, связанной с пешеходом Петей. Миша проехал 8 км, а Вася за это же время – 6 км. Значит когда Вася проедет еще 18 км, Миша его догонит. И это произойдет на расстоянии 24 км от Пети.

№4 Два одинаковых призматических сосуда с квадратными основаниями со стороной $4a$ и высотой $10a$ наполовину заполнены водой плотности ρ_0 . В каждый из сосудов положили по одному кубику. В первый сосуд положили пластиковый кубик плотности $\rho_1 = \rho_0/4$ со стороной $2a$. Во второй --- деревянный $\rho_1 = \rho_0/2$ со стороной a . На сколько процентов изменение уровня в первом сосуде больше изменения уровня воды во втором сосуде?

Ответ: 300%.

Решение. Уровень поднимется в первом сосуде на высоту $a/8$, во втором сосуде - на $a/32$. То есть ответ 300%

№5 В условиях предыдущей задачи сосуды с кубиками соединили тонкой трубкой. Какое количество воды при этом перетекло из одного сосуда в другой?

Ответ: $3/4 a^3$.

Решение. Разность уровней $3a/32$. При соединении сосудов получится среднее арифметическое. Из одного сосуда перетечет слой воды $3a/64$. Таким образом, перетечет объем $3a/64 \times 16a^2 = 3/4 a^3$. Но надо проверять, не окажется ли один из кубиков на дне. В этом случае уровни не выровнялись бы.