

**Олимпиада школьников «Ломоносов» 2013/2014 учебного года
по механике и математическому моделированию**

ЗАДАНИЕ ОЛИМПИАДЫ

Заочный этап Тур 2

10 – 11 класс

В каждой из шести задач требуется дать только ответ. Решение присылать не нужно. Ответ на каждую задачу должен быть представлен в виде целого числа или десятичной дроби округленной до двух десятичных знаков. В качестве разделителя целой части числа и мантииссы используется точка (например 1.31). При вычислениях (в случае необходимости) считать: ускорение свободного падения равно 10 м/с^2 абсолютный ноль температур равен -273°C .

::1.1:: Из туристического речного трамвайчика, движущегося против течения, выпал и поплыл чемодан туриста. Через 1 минуту после этого команда выслала быстроходный катер. Во сколько раз скорость катера больше скорости трамвайчика, если с момента выхода катера до его возвращения с потерянным чемоданом прошло 4 минуты?

{=1,5}

Решение: Рассмотрим движение всех тел в системе координат, связанной с водой. Пусть скорость речного трамвайчика равна V . Тогда скорость катера – $k*V$, где k – искомая величина. В момент старта катера расстояние до чемодана равно $V*t_1$ ($t_1=1$). Из условия задачи следует, что выполняется равенство $2*V*t_1+V*t_2=k*V*t_2$ ($t_2=4$). Отсюда $k=1,5$.

::1.2:: Из теплохода, движущегося по течению реки, выпал и поплыл чемодан туриста. Через 3 минуты после этого команда выслала быстроходный катер. Во сколько раз скорость катера больше скорости теплохода, если с момента выхода катера до его возвращения с потерянным чемоданом прошло 24 минуты?

{=1,25}

::1.3:: Из туристического речного трамвайчика, движущегося по течению, выпал и поплыл чемодан туриста. Через 2 минуты после этого команда выслала быстроходный катер. Во сколько раз скорость катера больше скорости трамвайчика, если с момента выхода катера до его возвращения с потерянным чемоданом прошло 8 минут?

{=1,5}

::1.4:: Из теплохода, движущегося против течения реки, выпал и поплыл чемодан туриста. Через 2 минуты после этого команда выслала быстроходный катер. Во сколько раз

скорость катера больше скорости теплохода, если с момента выхода катера до его возвращения с потерянным чемоданом прошло 16 минут?

{=1,25}

::2.1:: Лестница длиной 5 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 1 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 3 секунды после начала движения?

{=0,75}

Решение: Скорость есть производная от $\sqrt{25-t^2}$, которая равна $\frac{t}{\sqrt{25-t^2}}$.

::2.2:: Лестница длиной 5 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 3 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 1 секунду после начала движения?

{=2,25}

::2.3:: Лестница длиной 5 м стоит вертикально, вплотную прижатая к стене. Нижний ее конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 6 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец лестницы через 0,5 секунды после начала движения?

{=4,5}

::2.4:: Шест длиной 13 м стоит вертикально, вплотную прижатый к стене. Нижний его конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 6 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец шеста через 2 секунды после начала движения?

{=14,4}

::2.5:: Шест длиной 13 м стоит вертикально, вплотную прижатый к стене. Нижний его конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 4 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец шеста через 3 секунды после начала движения?

{=9,6}

::2.6:: Шест длиной 13 м стоит вертикально, вплотную прижатый к стене. Нижний его конец начинают отодвигать от стены с постоянной скоростью 3 м/с. С какой скоростью (в м/с) будет опускаться верхний конец шеста через 4 секунды после начала движения?

{=7,2}

::3.1:: Шестдесят деревьев расположены на прямой линии на расстоянии 5 м друг от друга. На этой же прямой на расстоянии 20 м от первого дерева и 15 м от второго дерева находится колонка с водой. Садовник приносит ведро воды для каждого дерева, поливает его

и возвращается обратно к колонке. С полным ведром садовник идёт со скоростью 4 км/час, а с пустым – со скоростью 6 км/час. Время набирания ведра воды из колонки – 2 минуты, время полива одного дерева – 0,5 минуты. Сколько времени займет у садовника полив всех деревьев: от начала набирания первого ведра воды до момента возврата к колонке после полива последнего дерева? Ответ дать в минутах, округлив его до ближайшего целого числа минут (по правилам округления).

{=344}

Решение: На набор воды и поливку 60 деревьев уйдет $(2 + 0,5) \cdot 60 = 150$ минут. Из условия делаем вывод о том, что колонка расположена у 5-го дерева. Сумма расстояний от колонки до всех деревьев от первого до 60-го равна: $20 + 15 + 10 + 5 + 0 + 5 + 10 + 15 + \dots + 5 \cdot 55$

$= 50 + 5 + 5 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + \dots + 5 \cdot 55 = 50 + \frac{5 + 5 \cdot 55}{2} \cdot 55 = 7750$ м. Поэтому в пути садовник проведет

время, равное $\frac{7750}{6000} + \frac{7750}{4000} = \frac{7750 \cdot 60}{1000} \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4} \right) = \frac{775 \cdot 6 \cdot 5}{10 \cdot 12} = \frac{775}{4} = 193,75$ мин, а общее время

равно $193,75 + 150 = 343,75$ мин.

::3.2:: Пятьдесят деревьев расположены на прямой линии на расстоянии 5 м друг от друга. На этой же прямой на расстоянии 15 м от первого дерева и 10 м от второго дерева находится колонка с водой. Садовник приносит ведро воды для каждого дерева, поливает его и возвращается обратно к колонке. С полным ведром садовник идёт со скоростью 4 км/час, а с пустым – со скоростью 8 км/час. Время набирания ведра воды из колонки – 3 минуты, время полива одного дерева – 1 минута. Сколько времени займет у садовника полив всех деревьев: от начала набирания первого ведра воды до момента возврата к колонке после полива последнего дерева? Ответ дать в минутах, округлив его до ближайшего целого числа минут (по правилам округления).

{=322}

::3.3:: Пятьдесят деревьев расположены на прямой линии на расстоянии 5 м друг от друга. На этой же прямой на расстоянии 20 м от первого дерева и 15 м от второго дерева находится колонка с водой. Садовник приносит ведро воды для каждого дерева, поливает его и возвращается обратно к колонке. С полным ведром садовник идёт со скоростью 5 км/час, а с пустым – со скоростью 8 км/час. Время набирания ведра воды из колонки – 2 минуты, время полива одного дерева – 1 минута. Сколько времени займет у садовника полив всех деревьев: от начала набирания первого ведра воды до момента возврата к колонке после

полива последнего дерева? Ответ дать в минутах, округлив его до ближайшего целого числа минут (по правилам округления).

{=252}

::3.4:: Шестьдесят деревьев расположены на прямой линии на расстоянии 5 м друг от друга. На этой же прямой на расстоянии 15 м от первого дерева и 10 м от второго дерева находится колонка с водой. Садовник приносит ведро воды для каждого дерева, поливает его и возвращается обратно к колонке. С полным ведром садовник идет со скоростью 5 км/час, а с пустым – со скоростью 8 км/час. Время набирания ведра воды из колонки – 1,5 минуты, время полива одного дерева – 0,5 минуты. Сколько времени займет у садовника полив всех деревьев: от начала набирания первого ведра воды до момента возврата к колонке после полива последнего дерева? Ответ дать в минутах, округлив его до ближайшего целого числа минут (по правилам округления).

{=276}

::4.1:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1 . Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности ρ_2 . При каком отношении ρ_1 к плотности воздуха ρ подъемная сила воздушного шара изменится вдвое при замене газа плотности ρ_1 на газ плотности ρ_2 . Весом оболочки шара пренебречь. Температуру и давление газов считать постоянными.

{= 0.33}

Решение. Подъемная сила воздушного шара равна разности выталкивающей архимедовой силы и веса газа в оболочке. Если заменить газ на более тяжелый, то подъемная сила уменьшится. Отсюда и из условий задачи вытекает следующая процедура ее решения:

$$\frac{\rho V - \rho_1 V}{\rho V - \rho_2 V} = 2 \Rightarrow \frac{\rho - \rho_1}{\rho - \rho_2} = 2 \Rightarrow \frac{\rho - \rho_1}{\rho - 2\rho_1} = 2 \Rightarrow \rho - \rho_1 = 2(\rho - 2\rho_1) \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho = 3\rho_1 \Rightarrow \frac{\rho_1}{\rho} = \frac{1}{3}$$

::4.2:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1 . Но однажды наполнили газом втрое большей плотности ρ_2 . При каком отношении ρ_1 к плотности воздуха ρ подъемная сила воздушного шара изменится вдвое при замене газа плотности ρ_1 на газ плотности ρ_2 . Весом оболочки шара пренебречь. Температуру и давление газов считать постоянными.

{= 0.2}

::4.3:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1 . Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности ρ_2 . При каком отношении ρ_1 к плотности воздуха ρ подъемная сила

воздушного шара изменится втрое при замене газа плотности ρ_1 на газ плотности ρ_2 . Весом оболочки шара пренебречь. Температуру и давление газов считать постоянными.

{ = 0.4 }

::4.4:: Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1 . Но однажды наполнили газом втрое большей плотности ρ_2 . При каком отношении ρ_1 к плотности воздуха ρ подъемная сила воздушного шара изменится втрое при замене газа плотности ρ_1 на газ плотности ρ_2 . Весом оболочки шара пренебречь. Температуру и давление газов считать постоянными.

{ = 0.25 }

::5.1:: Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел половину, а второй - четверть этой высоты. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.

{ = 1.5 }

Решение: Из второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} a_1 = g - \frac{F}{m_1} \\ a_2 = g - \frac{F}{m_2} \end{cases} \quad a_1 = \frac{1}{2} g = 2a_2 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{2} m_2$$

Ответ: $\frac{3}{2}$

::5.2:: Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел третью часть, а второй - четверть этой высоты. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.

{ = 1,13 }

::5.3:: Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел половину, а второй - треть этой высоты. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.

{ = 1,33 }

::5.4:: Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь

поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел половину, а второй - пятую часть этой высоты. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.

{ = 1,6 }

::5.5:: Два шарика одинакового радиуса без начальной скорости были сброшены с одной и той же высоты над поверхностью Земли. За время, требуемое каждому из них, чтобы достичь поверхности с той же начальной высоты при отсутствии атмосферы, первый пролетел третью часть, а второй - пятую часть этой высоты. Найдите отношение массы первого шарика к массе второго, считая силу сопротивления движению постоянной величиной.

{ = 1,2 }

::6.1:: В некотором термодинамическом процессе давление и объем заданной порции газа изменяются со временем по закону :

$$\begin{cases} \frac{P}{P_1} = 8t^2 - 10t + 5, \\ \frac{V}{V_1} = 2t + 1. \end{cases}$$

где t - время в секундах, P_1 V_1 - известные параметры процесса. Какой минимальной величины достигает температура этой порции газа в течение первой секунды данного процесса, если начальная температура равна $T_0 = 400K$?

{ =320 }

Решение. Температура пропорциональна произведению давления на объем $PV = RT$.

Тогда будем иметь

$$\frac{P}{P_1} \frac{V}{V_1} = \frac{T}{T_1} = (8t^2 - 10t + 5)(2t + 1) = f(t)$$

Вычислим производную функции $f(t)$ и изучим ее точки экстремума и участки возрастания и убывания.

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{d}{dt} (16t^3 - 12t^2 + 5) = 48t^2 - 24t = 0$$

Отсюда следует, что минимальное значение отношения $\frac{T_m}{T_1}$ будет достигаться в момент времени $t_0 = 0.5$. При этом $f(t_0) = 4$. Это значит, что минимальная температура равна $T_m = 4T_1$. При $t = 0$ из условия задачи следует, что $\frac{T_0}{T_1} = 5 \Rightarrow T_1 = 80 \Rightarrow T_m = 320$.

Ответ: $T_m = 320$.

::6.2.: В некотором термодинамическом процессе давление и объем заданной порции газа изменяются со временем по закону

$$\begin{cases} \frac{P}{P_1} = 2t^2 - 5t + 5, \\ \frac{V}{V_1} = t + 1. \end{cases}$$

где t - время в секундах, P_1 V_1 - известные параметры процесса. Какой минимальной величины достигает температура этой порции газа в течение первой секунды данного процесса, если начальная температура равна $T_0 = 300K$?

{ = 240 }

::6.3.: В некотором термодинамическом процессе давление и объем заданной порции газа изменяются со временем по закону

$$\begin{cases} \frac{P}{P_1} = 2t^2 - 5t + 5, \\ \frac{V}{V_1} = t + 1. \end{cases}$$

где t - время в секундах, P_1 V_1 - известные параметры процесса. Какой минимальной величины достигает температура этой порции газа в течение первой секунды данного процесса, если начальная температура равна $T_0 = 850K$?

{ = 680 }

::6.4.: В некотором термодинамическом процессе давление и объем заданной порции газа изменяются со временем по закону

$$\begin{cases} \frac{P}{P_1} = 32t^2 - 20t + 5, \\ \frac{V}{V_1} = 4t + 1. \end{cases}$$

где t - время в секундах, P_1 V_1 - известные параметры процесса. Какой минимальной величины достигает температура этой порции газа в течение первой секунды данного процесса, если начальная температура равна $T_0 = 750K$?

{ = 600 }