ЛОМОНОСОВ – 2013. МЕХАНИКА. 10 – 11 классы

Краткие решения и критерии оценки задач

Задача 1 (*вариант 131*)

Перворазрядник Чуков пробегает один круг по пересеченной местности на три минуты быстрее, чем его одноклассник Геков (оба они бегут с постоянной скоростью). Если они побегут одновременно из одного места этого круга, но в разные стороны, то встретятся не ранее, чем через две минуты, а если они стартуют из одного места в одну сторону, то Чуков обгонит Гекова на круг не позже, чем через 18 минут. Определите, какие значения может принимать время, за которое Чуков пробегает один круг.

Решение. Если Чуков пробегает круг за t минут, то у Гекова на это уйдет $t+3$ минуты. Если длина круга равна L метров, то скорость Чукова $V_1=\dfrac{L}{t}$, а скорость Гекова $V_2=\dfrac{L}{t+3}$. По условию $\dfrac{L}{V_1+V_2}\geqslant 2$, $\dfrac{L}{V_1-V_2}\leqslant 18$.

Поэтому $\dfrac{L}{\dfrac{L}{t}+\dfrac{L}{t+3}}\geqslant 2$, отсюда $\dfrac{t(t+3)}{2t+3}\geqslant 2$, $t^2+3t\geqslant 4t+6$, $t^2-t-6\geqslant 0$. Корни соответствующего уравнения: -2 и 3. Значит, $t\geqslant 3$.

Аналогично $\dfrac{L}{\dfrac{L}{t}-\dfrac{L}{t+3}}\leqslant 18$, отсюда $\dfrac{t(t+3)}{3}\leqslant 18$, $t^2+3t-54\leqslant 0$. Корни соответствующего уравнения: -9 и 6. Значит, $t\leqslant 6$. Поэтому ответ: $[3;6]$.

Ответ: От 3 до 6 минут (включая 3 и 6).

Ответы других вариантов:

Вариант 132. От 10 до 15 минут (включая 10 и 15).
Вариант 133. От 3 до 9 минут (включая 3 и 9).
Вариант 134. От 10 до 20 минут (включая 10 и 20).

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **10 баллов –** решение доведено до правильных неравенств относительно t, но в дальнейшем сделаны ошибки; **5 баллов –** правильно выписаны уравнение и два неравенства относительно неудачно выбранных неизвестных величин, решение которых или не получено, или получено с ошибками.

Задача 2 (*вариант 131*)

Из точки, находящейся на поверхности земли, по всем направлениям с одинаковой скоростью 10 м/с выпускают большое количество маленьких шариков. Среди всех шариков, упавших от точки старта на расстоянии не ближе, чем 96% от расстояния, на котором упал дальше всех улетевший шарик, найдите тот, который проведет в полете наибольшее время. Чему равно это время? Ответ выразите в секундах и округлите до одного знака после запятой. Ускорение свободного падения 10 м/с^2.

Решение. Дальность полета тела, брошенного со скоростью V_0 под углом $\propto$ к горизонту, равна $l=\dfrac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}$, а время полета равно $\tau=\dfrac{2V_0\sin\alpha}{g}$.

По условию $\dfrac{V_0^2\sin 2\alpha}{g}\geqslant\dfrac{96}{100}\dfrac{V_0^2\sin(2\cdot 45^\circ)}{g}$, т. е. $\sin 2\alpha\geqslant\dfrac{96}{100}$. Среди этих шариков нужно выбрать тот, у которого максимально $\tau=\dfrac{2V_0\sin\alpha}{g}$, т. е. тот, у которого $\sin\alpha$ является наибольшим. Т. к. $\arcsin\frac{24}{25} \leqslant 2\alpha \leqslant \pi - \arcsin\frac{24}{25}$, то $\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}$. Поэтому наибольшим временем полета является $\frac{2V_0}{g}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\right) = \frac{2V_0}{g}\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{24}{25}\right)$

$$= \frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{1+\cos\left(\arcsin\frac{24}{25}\right)}{2}} = \frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = \frac{2V_0}{g}\sqrt{\frac{16}{25}} = 1{,}6 \text{ с.}$$

Ответ: 1,6 секунды.

Ответы других вариантов:

Вариант 132. 9,6 метров. ***Вариант 133.*** 2,0 секунды. ***Вариант 134.*** 10,0 метров.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение, но имеются дефекты (например, не обоснован выбор значения α); **10 баллов –** решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки; **5 баллов –** выписаны верные формулы для дальности и времени полета, но существенного продвижения нет.

Задача 3 (*вариант 131*)

Три шкива с параллельными осями и одинаковыми радиусами $r = 2$ см должны быть соединены плоской ременной передачей. Расстояние между осями вращения шкивов O_1 и O_2 равно 12 см, а между осями вращения шкивов O_1 и O_3 равно 10 см. Расстояние от оси O_3 до плоскости, в которой находятся оси O_1 и O_2, равно 8 см. Определите длину ремня для передачи, который изготавливается путём сшивания концов нерастяжимого прорезиненного шнура (считаем, что длина ремня равна длине этого шнура). Всегда ли для его изготовления хватит шнура длиной 54 см?

Решение. 1) Вначале решается геометрическая задача о нахождении стороны O_2O_3. По условию $\sin\angle O_1 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$; поэтому $\cos\angle O_1 = \pm\frac{3}{5}$. Третья сторона находится по теореме косинусов и равняется или 10 см, или $2\sqrt{97}$ см.

2) Периметр фигуры будет равен сумме трех прямолинейных отрезков и сумме трех дуг. Сумма прямолинейных отрезков равна периметру треугольника $O_1O_2O_3$.

3) Сумма длин трех дуг равна $r\cdot(\pi-\alpha) + r\cdot(\pi-\beta) + r\cdot(\pi-\gamma)$ (здесь α, β, γ – углы треугольника $O_1O_2O_3$), что равняется $r\cdot(3\pi-\alpha-\beta-\gamma) = r\cdot(3\pi-\pi) = 2\pi r$.

4) В случае остроугольного треугольника требуемая длина ремня есть $12+10+10+2\pi\cdot 2 = 32+4\pi$ см (для справки: $32+4\pi \approx 44{,}57$). Это очевидно меньше, чем 54 (т. к. $32+4\pi < 32+4\cdot 4 = 48 < 54$), поэтому шнура хватает.

5) В случае тупоугольного треугольника требуемая длина ремня есть $12+10+2\sqrt{97}+2\pi\cdot 2 = 22+2\sqrt{97}+4\pi$ см (для справки: $22+2\sqrt{97}+4\pi \approx 54{,}26$). Здесь шнура не хватает.

Поэтому ответ: **нет.** Для получения максимального балла требуется аккуратное сравнение $22+2\sqrt{97}+4\pi > 54 \Leftrightarrow \sqrt{97}+2\pi > 16 \Leftrightarrow \sqrt{97}+2\pi > 9{,}8+6{,}2 = 16$.

Ответ: а) $32+4\pi$ см или $22+2\sqrt{97}+4\pi$ см; б) не всегда.

Ответы других вариантов:

Вариант 132. а) $36+6\pi$ см или $23+3\sqrt{41}+6\pi$ см; б) не всегда.

Вариант 133. а) $32+6\pi$ см или $22+2\sqrt{97}+6\pi$ см; б) не всегда.

Вариант 134. а) $36+8\pi$ см или $23+3\sqrt{41}+8\pi$ см; б) не всегда.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение и верный ответ, но имеются дефекты (например: не проведено или некорректно проведено сравнение чисел в последнем пункте решения; не доказано, что сумма длин дуг равна длине окружности); **10 баллов –** решение в основном верное, но содержит вычислительные ошибки; **5 баллов –** рассмотрен только один из двух случаев, при этом решение и ответ (для данного случая) полностью верные.

Задача 4 (*вариант 131*).

При изучении работы нового типа теплового двигателя, работающего циклически, было обнаружено, что часть периода он получает тепло, причем абсолютная величина мощности теплоподвода выражается законом: $P_1(t) = P_0 \dfrac{\sin \omega t}{100+\sin t^2}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{\omega}$. Газ совершает работу, развивая механическую мощность $P_2(t) = 3P_0 \dfrac{\sin(2\omega t)}{100+\sin(2t)^2}$, $0 < t < \dfrac{\pi}{2\omega}$. Работа над газом, которую совершают внешние тела, составляет 2/3 от величины совершенной газом работы. Определите КПД двигателя.

Решение. КПД тепловой машины есть отношение полезной работы к количеству теплоты, полученному газом за цикл. Для того чтобы найти полезную работу, требуется найти разность работ: совершенной газом (A_+) и совершенной над ним (A_-). Каждая из этих величин находится интегрированием мощности по времени или нахождением площади фигуры, заключенной между графиком зависимости мощности от времени и осью времени. Аналогично находится количество теплоты, полученное газом (Q_+).

Заметим, функция $P_2(t) = aP_1(bt)$, поэтому, так как фигура, образованная графиком P_2, получается из фигуры, соответствующей функции P_1 растяжением вдоль вертикальной оси в *a* раз и сжатием вдоль горизонтальной оси в *b* раз, то $A_+ = Q_+ \cdot \dfrac{a}{b}$. По условию, $A_- = \beta A_+$. Окончательно, $\eta = \dfrac{a}{b}(1-\beta)$.

При данных в условии задачи $a = 3$, $b = 2$, $\beta = \dfrac{2}{3}$: $\eta = \dfrac{1}{2}$.

Отметим, что интеграл от функции $P_1(t)$ невозможно выразить через элементарные функции. С другой стороны, подынтегральная функция существенно упрощается, если пренебречь вторым слагаемым в знаменателе. Существенной потери точности при этом не происходит, так как второе слагаемое ограничено и на два порядка меньше первого. После этого интегралы легко вычисляются.

Ответ: $\dfrac{1}{2}$.

Ответы других вариантов:

Вариант 132. $\dfrac{1}{6}$. ***Вариант 133.*** $\dfrac{5}{6}$. ***Вариант 134.*** $\dfrac{2}{9}$.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** допущена арифметическая ошибка при вычислении окончательного ответа при условии полного правильного решения; **5 баллов –** выписано выражение для КПД, отмечена связь между указанными мощностями, но ответ не получен.

Задача 5 (*вариант 131*).

Вся местность разбита на квадраты, обозначенные двумя целыми индексами M и N так, что, например, точка с координатами $x = 12,25$, $y = 20,9$ находится в квадрате номер $[12;\,20]$, а точка с координатами $x = -12,34$, $y = 0,1239$ находится в квадрате номер $[-13;\,0]$ и так далее. Загадочный объект движется в плоскости Oxy по траектории $y = \left(\left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5$, а луч радара на местности направлен вдоль линии $y = x + 2013$. Укажите номера всех квадратов, в которых радаром будет зарегистрировано появление загадочного объекта.

Решение. 1) Уравнение $\left(\left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013 = x$ (1)

равносильно уравнению $x^5 - 2013 = x$. (2)

Возможное доказательство: а) Если x является корнем уравнения (2), то $\left(\left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013 = \left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013 = \left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013$ $= x^5 - 2013 = x$, т. е. x является корнем уравнения (1). б) Если x является корнем уравнения (1), то он обязан являться и корнем уравнения (2). Предположим противное. Пусть $x^5 - 2013 > x$. Тогда из того, что функция $g(x) = x^5 - 2013$ монотонно возрастает, следует: $\left(\left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013 > \left(\left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013\right)^5 - 2013 > \left(x^5 - 2013\right)^5 - 2013 >$ $x^5 - 2013 > x$, т.е. левая часть уравнения (1) больше, чем правая. Аналогично нет решений, если $x^5 - 2013 < x$. в) Значит, все корни (1) и (2) совпадают (или их нет), т. е. уравнения (1) и (2) равносильны.

2) Введем функцию $f(x) = x^5 - x - 2013$. Имеем $f(4) < 0$, $f(5) > 0$, поэтому из-за непрерывности между точками 4 и 5 будут корни (корень один, но это здесь неважно).

3) Уравнение $x^5 - 2013 = x$ не имеет корней вне промежутка $(4;\,5)$. Докажем это.

Т. к. $f(x) = x\left(x^4 - 1\right) - 2013$, то нет корней при $x \leqslant -1$ и при $x \in (1;4)$ – в этих случаях, очевидно, что $f(x) < 0$. При $x \in [-1;1]$ корней нет, т. к. тогда $x^5 - x < 2013$. Нет корней и при $x > 5$, т. к. тогда $x\left(x^4 - 1\right) - 2013 > 5\left(5^4 - 1\right) - 2013 > 0$.

Отсутствие корней на $(4;\,5)$ можно доказывать и с помощью производной: $f'(x) = 5x^4 - 1$ – функция возрастает всюду, кроме $x^4 \leqslant \frac{1}{5}$ (некая окрестность нуля). Тогда нужно аккуратно эту окрестность «обойти». Например, нет корней на $x \in [-1;1]$ (см. выше), нет корней при $x \leqslant -1$ (см. выше) и будет ровно один корень при $x > 1$.

4) Значит: $x \in (4;\,5)$. Поэтому $y = x + 2013 \in (2017;\,2018)$.

Ответ: $[4;\,2017]$.

Ответы других вариантов:

Вариант 132. $[-5;\,-2018]$. ***Вариант 133.*** $[4;\,2016]$. ***Вариант 134.*** $[-5;\,-2017]$.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный ответ; **15 баллов –** в основном верное решение и верный ответ, но имеются дефекты (например: переход от (1) к (2) сделан без обоснования или с некорректным обоснованием); **10 баллов –** не доказано что уравнение не имеет других решений, кроме $x \in (4;5)$ (отметим, что доказательство должно быть четким и аккуратным; рассуждения типа «очевидно, что эта функция круче, и поэтому пересечений быть не может» таковым не является); **5 баллов** – обоснованно сделан переход к уравнению (2), но дальнейших продвижений нет.

Задача 6 (*вариант 131*)

Имеется очень много однородных круглых дисков одинаковой толщины и одинаковой плотности. Эти диски выставляют на горизонтальную доску так, что плоскость дисков вертикальна. Два соседних диска касаются друг друга, причем радиусы двух соседних дисков относятся как 2 : 1. Диск слева всегда больше диска справа (см. рис). Радиус наибольшего диска равен 2 м. Определите расстояние от центра наибольшего диска до центра масс системы.

Решение. Радиусы дисков образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q<1$. Здесь $q=\frac{1}{2}$, $R=2$. Следовательно, массы дисков также образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $q^2<1$. Масса всей системы конечна, ее размер тоже, поэтому положение центра масс определено.

Найдем высоту, на которой центр масс расположен над доской:

$M_i = Mq^{2(i-1)}$, $i=1,2,3,\dots$; $R_i = Rq^{i-1}$, $i=1,2,3,\dots$

$$Y=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}(M_iR_i)}{\sum_{i=1}^{\infty}M_i}=R\frac{1-q^2}{1-q^3}.$$

Соединяем отрезком центры двух соседних дисков, и из прямоугольного треугольника с такой гипотенузой и катетами параллельными и перпендикулярными доске, находим угол между этим отрезком и доской: $\sin\alpha=\frac{1-q}{1+q}$. Так как этот угол не зависит от номера диска, все центры дисков, а значит, и центр масс лежит на прямой, проходящей через центр первого диска и имеющей найденный наклон к доске.

Из прямоугольного треугольника с катетами, параллельным и перпендикулярным доске, и гипотенузой, соединяющей центр первого диска с центром масс системы, найдем искомое расстояние: $d=\frac{R-Y}{\sin\alpha}=R\frac{q^2(1+q)}{1-q^3}$.

Ответ: $\frac{6}{7}$ м.

Ответы других вариантов:

Вариант 132. $\frac{180}{49}$ м. ***Вариант 133.*** $\frac{60}{19}$ м. ***Вариант 134.*** $\frac{252}{37}$ м.

Критерии оценки: 20 баллов – правильное (не обязательно такое, как выше) решение и правильный числовой ответ; **15 баллов** – в основном верное решение, допущена арифметическая ошибка; **5 баллов** – верно найдена только одна координата центра масс.

Внимание! ***Итоговый балл участника равен сумме баллов за пять задач из шести, то есть худшая из шести оценок за задачи в сумму баллов не входит.***