

Ответы на задания отборочного этапа олимпиады школьников Ломоносов по механике, 2011/2012 учебный год

7 — 8 класс

1. 412 км.
2. 30 метров.
3. На 8 оборотов. Колеса железнодорожных вагонов сделаны в форме конуса, поэтому радиус качения у внешних колес оказывается больше, чем у внутренних, что позволяет уравнивать число оборотов.
4. 108 тубиков.
5. Можно. Достаточно измерить отношение толщин мха на противоположных сторонах, смежных с пустой.

9 класс

1. увеличилась на 25%.
2. а) 30 метров.
- б) нельзя
3. от получаса до 1 часа 20 минут после выхода первого туриста.
4. $T = \frac{L}{V_0} \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{3}{4}$ с.
5. Основные тезисы ответа следующие. Тело человека не нагревается до температуры воздуха в сауне за счет теплоотдачи. При плотном контакте цепочки с телом она не нагревается выше температуры тела. Если цепочка не соприкасается с телом, то она нагревается практически до температуры воздуха. При последующем контакте цепочки с телом можно получить ожог, так в силу большой теплопроводности металла произойдет быстрый теплообмен и тело получит большое количество теплоты на небольшом участке за малое время.

10 — 11 класс

1. $t \in [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$ Время указано в часах.
2. Во втором случае в $\frac{k - 1 + \sqrt{(n - 1)k^2 + 1}}{nk^2} = \frac{5}{4}$ раз больше.
3. а) форму вытянутого параллелепипеда со сторонами 44, 44 и 220 сантиметров;
б) форму куба со стороной 50 см.
4. $4\sqrt{15} \approx 15,5$ м.
5. примерно 1.6 суток.
6. Основные тезисы ответа следующие. Тело человека не нагревается до температуры воздуха в сауне за счет теплоотдачи. При плотном контакте цепочки с телом она не нагревается выше температуры тела. Если цепочка не соприкасается с телом, то она нагревается практически до температуры воздуха. При последующем контакте цепочки с телом можно получить ожог, так в силу большой теплопроводности металла произойдет быстрый теплообмен и тело получит большое количество теплоты на небольшом участке за малое время.

1.2 Решения заданий заочного тура

10 — 11 класс

1. Закон движения первого туриста: $S = \sqrt{1 + 6t} - 1$, а второго $-S = 6(t - \frac{1}{6})$ при $t \geq \frac{1}{6}$; $S = 0$ при $t < \frac{1}{6}$.

Требуемое условие, очевидно, выполнено, когда оба туриста находятся «по одну сторону» от знака. И не выполнено, когда знак находится между ними. Поэтому, Т. к. первый турист достигает знака в момент времени t_1 : $\sqrt{1 + 6t_1} - 1 = 2$, т. е. при $t_1 = \frac{4}{3}$, а второй — в момент t_2 : $6(t_2 - \frac{1}{6}) = 2$, т. е. при $t_2 = \frac{1}{2}$, то подходящие моменты времени $t \in [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{4}{3}, +\infty]$. При этом движется ли второй турист или все еще находится на привале — не имеет значения.

Ответ: $t \in [0, \frac{1}{2}] \cup [\frac{4}{3}, +\infty)$.

2. Пусть высота дупла H . Тогда скорость Винии перед ударом в первый раз $V_I = \sqrt{2gH}$.

Во втором случае: перед ударом Пух имеет скорость $V_1 = \sqrt{2gh}$, $h = H/n$. После удара она станет $V_1' = \frac{1}{k}\sqrt{2gh}$. При подлете к земле скорость окажется

$$V_{II} = \sqrt{\frac{1}{k^2}2gh + 2g(H - h)}.$$

Ущерб, полученный Пухом в первый раз $I_I = MV_I\tau$, где M — масса медвежонка, а τ — длительность удара. Во втором раз имеем $I_{II} = M\tau[(V_1 - V_1') + V_{II}]$.

Окончательно, $I_{II}/I_I = \frac{k-1}{\sqrt{nk}} + \sqrt{\frac{(n-1)k^2+1}{nk^2}} = \frac{5}{4}$.

Ответ: Во втором случае в $\frac{k-1 + \sqrt{(n-1)k^2+1}}{nk^2} = \frac{5}{4}$ раз больше.

3. Несложно показать, что при фиксированной сумме двух чисел их произведение максимально в том и только в том случае, когда эти числа равны. Таким образом, понятно, что имеет смысл рассматривать чемоданы, в основании которых лежит квадрат.

В случае, если более существенным оказывается условие о сумме всех трех измерений из симметрии задачи следует, что чемодан должен иметь форму куба. В таком случае его объем будет равен $(150/3)^3 = 50^3 \text{ см}^3$.

Длинномерный чемодан наибольшего объема имеет размеры $220/k, 220/k, 220$, что соответствует объему $220^3/k^2$.

Таким образом кубический чемодан будет больше по объему, чем длиномерный, если $50^3 > 220^3/k^2$, то есть $k > (4.4)^{3/2} \approx 9, 23$.

Для данных в условии значений k получаем

Ответ: а) форму вытянутого параллелепипеда со сторонами 44, 44 и 220 сантиметров; б) форму куба со стороной 50 см.

4. Пусть $2b$ — ширина поля; $2a$ — ширина ворот; c — расстояние до боковой линии. Проведем окружность через две штанги ворот (точки A_1 и A_2 ,

касающуюся прямой, по которой движется футболист (B — точка касания). Тогда угол A_1BA_2 — максимально возможный (любой другой угол равен соответствующему вписанному в окружность углу минус некоторая величина). Радиус данной окружности есть $b - c$. Поэтому по теореме Пифагора: $(b - c)^2 = a^2 + x^2$, где x — искомое расстояние. Значит, $x = \sqrt{(b - c)^2 - a^2} = \sqrt{16^2 - 4^2} = \sqrt{240} = 4\sqrt{15} \approx 15,5$ м.

Ответ $x = \sqrt{(b - c)^2 - a^2} = \sqrt{16^2 - 4^2} = \sqrt{240} = 4\sqrt{15} \approx 15,5$ м.

5. Полярный день на поверхности Земли (на нижней ступеньке) начнется в тот момент, когда Солнце будет в зените над экватором, и будет продолжаться ровно полгода (так как неравномерностью вращения Земли мы пренебрегаем). В деканате есть возможность увидеть Солнце раньше, так как горизонт находится дальше. Угол α , который в этот момент составляет земная ось с линией, соединяющей центр Земли точкой в которой луч от Солнца касается Земли, определяется соотношением

$$\cos \alpha = R / (R + h),$$

где R — радиус Земли, h — высота деканата над поверхностью. Тот же угол составляет экваториальная плоскость с плоскостью эклиптики, то есть северная широта точки, в которой Солнце будет в зените, когда начнется полярный день в деканате, есть α .

Солнце бывает в зените во всех точках между Северным и Южным тропиками. Так как эти точки принадлежат сечению поверхности Земли плоскостью эклиптики, эти точки лежат на большой окружности, назовем ее a . Пусть A — одна из точек пересечения окружности a и экватором. Рассмотрим произвольную точку M на окружности a . Пусть (для определенности), точка A — ближайшая к ней точка пересечения окружности a и экватора. Рассмотрим сферический треугольник, образованный большой окружности дугой AM , дугой меридиана, проходящего через M и дугой экватора. Дуга $AM = \omega t$, где $\omega = 2\pi / T$, T — 1 год, t — время, прошедшее (оставшееся) с солнцестояния (прохождения Солнца в зените над A), дуга меридиана, по определению, широта точки M — θ . Также известны двугранные углы. Против дуги AM он равен $\pi/2$, а против дуги меридиана $\theta_0 = 23,4378^\circ$ (широта тропиков, угол между экваториальной плоскостью и плоскостью эклиптики). По теореме синусов для сферических треугольников имеем:

$$\sin \theta = \sin \theta_0 \sin \omega t.$$

Отсюда найдем время τ , между солнцестоянием и восходом Солнца в деканате:

$$\sin \alpha = \sin \theta_0 \sin \omega \tau.$$

Для отыскания τ воспользуемся приближением малых углов: $\cos \alpha = 1 - \alpha^2/2$, $\sin \alpha = \alpha$, $\sin \omega \tau = \omega \tau$. Из приведенных выше формул получим:

$$\tau = \sqrt{\frac{2h}{R}} \frac{1}{\omega \sin \theta_0} = \sqrt{\frac{2h}{R}} \frac{T}{2\pi \sin \theta_0} \approx 0,8 \text{ суток.}$$

Отличие в продолжительности полярного дня составляет 2τ , то есть примерно 1,6 суток.

Ответ: 1,6 суток.

6. Температура тела определяется двумя конкурирующими факторами: теплоподводом и теплоотводом. Если человек заходит в парную активизируются естественные процессы теплоотвода — потоотделение, и как следствие испарение. Теплоподвод идет только путем теплообмена с воздухом. Воздух плохо проводит тепло, поэтому человек вполне может создать вокруг себя небольшой слой воздуха с более низкой, чем в окружающей среде температурой. Металлические предметы хорошо проводят тепло.

Рассмотрим цепочку, которая какое-то время повисела в воздухе, не прилегая к телу. Она выходит за пределы холодного слоя и имеет высокую температуру. При контакте ее с телом она отдает коже тепловую энергию, причем в силу большой теплопроводности, за короткий промежуток большое ее количество. Процессы теплоотвода не могут развивать такую мощность, в результате чего некоторая часть кожи нагревается очень сильно, что приводит к ожогу.