

Решения. 1. Если брусок соскальзывает с наклонной плоскости, он имеет ускорение $g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$. Отсюда получаем, что для первого тела $\mu_1 g \cos \alpha = 1 \text{ м/с}^2$. Это составляет 10 % от соответствующей величины для второго тела. Таким образом для второго тела $\mu_2 g \cos \alpha = 10 \text{ м/с}^2$, что больше, чем $g \sin \alpha = 5 \text{ м/с}^2$. Таким образом, второе тело не сможет начать скольжение, и его ускорение отличается от ускорения первого на 100%.

2. Пусть при первом равновесии расстояния от карандаша до мяча и до гири были равны l_1 и l_2 соответственно. Обозначим величину первого сдвига через x , а суммарный сдвиг за два раза через y . Тогда три условия равновесия рычага будут иметь вид:

$$\begin{aligned} Ml_1 &= ml_2 \\ M(l_1 + x) &= 2m(l_2 - x) \\ M(l_1 + y) &= 3m(l_2 - y) \end{aligned}$$

Вычитая первое уравнение из второго и третьего получим:

$$\begin{aligned} Mx &= ml_2 - 2mx \\ My &= 2ml_2 - 3my \end{aligned}$$

Отсюда

$$M = \frac{3y - 4x}{2x - y} m = 600 \text{ г.}$$

3. Пусть h — глубина колодца, g — ускорение свободного падения, τ — промежуток, в течение которого крышка открыта. Данные подобраны так, что $h/(g\tau^2) = 1$

Заметим, что слишком долго подниматься шарик из колодца не может. Наибольшее время подъема $\sqrt{2h/g} = \tau\sqrt{2}$. Поэтому шарик может вылететь только в течение первого открытия крышки с момента запуска шарика. Скорость не должна быть слишком большой, чтобы крышка успела открыться к моменту долета шарика ($\tau/2$), выберем ось y направленную вверх с нулем на уровне крышки:

$$y(\tau/2) = -h + V_{max} \frac{\tau}{2} - \frac{g\tau^2}{8} = 0.$$

Понятно, что чем больше скорость, тем позже шарик вернется. При $V_{max} = g\tau \left(\frac{2h}{g\tau^2} + \frac{1}{4} \right)$ он упадет на крышку в момент времени $t = 4\tau$. Заметим, что в этот момент крышка закрыта. Таким образом, при разных начальных скоростях шарик может упасть на крышку в моменты времени $T \in \left(\frac{3}{2}\tau; \frac{5}{2}\tau \right) \cup \left(\frac{7}{2}\tau; 4\tau \right)$.

$$\text{Найдем соответствующие значения } \frac{V}{g\tau} \in \left(\frac{2}{3} \frac{h}{g\tau^2} + \frac{3}{4}, \frac{2}{5} \frac{h}{g\tau^2} + \frac{5}{4} \right) \cup \left(\frac{2}{7} \frac{h}{g\tau^2} + \frac{7}{4}, 2 \frac{h}{g\tau^2} + \frac{1}{4} \right)$$

$$\text{Так как } \frac{h}{g\tau^2} = 1 \text{ получаем ответ: } \frac{V}{g\tau} \in \left(\frac{17}{12}, \frac{33}{20} \right) \cup \left(\frac{57}{28}, \frac{9}{4} \right).$$

Подставляя числа, получаем ответ:

$$V \in \left(\frac{85}{6}, \frac{33}{2} \right) \cup \left(\frac{285}{14}, \frac{45}{2} \right)$$

4. Алюминиевый шарик тяжелее воды, поэтому он в состоянии покоя будет занимать нижнее положение, а деревянный легче воды, поэтому будет занимать наивысшее положение. Заметим, что расстояние между шариками в состоянии покоя равно длине наименьшей стороны. Следовательно, наибольшая грань горизонтальна, а шарики находятся на одной вертикали.

Если аквариум начинает двигаться с ускорением, тяжелый шарик «тонет», двигаясь в сторону, противоположную ускорению, а легкий «всплывает», двигаясь по ускорению. Наибольшее возможное расстояние — большая диагональ параллелепипеда $\sqrt{3^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{29}$. Шарики разойдутся на такое расстояние при любом равноускоренном движении аквариума, если ускорение не параллельно одному из горизонтальных ребер.

5. Записав разложение многочлена на множители: $t^3 - ct^2 + 350t - 1000 = (t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)$, где t_1, t_2, t_3 — корни многочлена, получим:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = c \\ t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = 350 \\ t_1t_2t_3 = 1000. \end{cases}$$

Свойство геометрической прогрессии: $t_2^2 = t_1t_3$. Тогда $t_2^3 = 1000$, $t_2 = 10$.

Далее подставляя t_2 в уравнение, находим $c = 35$. Поэтому

$$\begin{cases} t_1 + t_3 = 25 \\ t_1t_3 = 100. \end{cases}$$

Отсюда $t_1 = 20$, $t_3 = 5$. Значит, следующий интервал времени равен 2,5 года. Ответ: Через 2,5 года.