Ответы и решения

№1

Обозначим через l длину отрезка KC. Момент M_1 относительно точки контакта K силы тяжести mg, приложенной к центру масс C, равен

$$M_1 = mg \cdot l \cos\alpha.$$

Если центр масс C человека вместе с велосипедом движется по окружности радиуса r с постоянной скоростью V, то к центру масс приложена центробежная сила

$$F = \frac{mV^2}{r}.$$

Момент M_2 этой силы относительно точки контакта K направленный в другую, по сравнению с моментом силы тяжести, сторону, равен

$$M_2 = F \cdot l \sin\alpha = \frac{mV^2}{r} \cdot l \sin\alpha.$$

Приравнивая величины M_1 и M_2, получаем, что

$$mgl \cos\alpha = \frac{mV^2}{r} \cdot l \sin\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{gr}{V^2}.$$

$$\boldsymbol{\alpha = \mathbf{arctg}\frac{gr}{V^2}}.$$

$$\alpha = arctg\left(\frac{9,81 \times 1,5}{2.5 * 2.5}\right) = arctg(2,3544) \approx 66,98°$$

Ответ: α = 66,98°

№2

Начальная скорость шарика $(V_x, V_y) = (V\cos\beta, V\sin\beta)$

Текущая скорость $v_x = V_x, \quad v_y = V_y - gt$

Текущая координата $x_t = s - V_x t, \quad y_t = V_y t - \frac{gt^2}{2}$

Угол касательной к траектории $tg\alpha = -\frac{V_y - gt}{V_x}$

Отсюда находится время встречи $t_1 = \frac{V_x tg\alpha + V_y}{g}$ и далее координаты.

При заданных значениях углов

$$V_x = \frac{1}{2}V,\ V_y = \frac{\sqrt{3}}{2}V,\ t_1 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\frac{V}{g},\ x_1 = s - \frac{1+\sqrt{3}}{4}\frac{V^2}{g},\ y_1 = \frac{V^2}{4g}$$

Численный ответ $x_1 = 0.54$м, $y_1 = 0.9$м.

Для расчета сжатия пружины r записываем равенство для потенциальной энергии в конце и кинетической в начале

$$mg(y_t - \frac{\sqrt{2}}{2}r) + C\frac{r^2}{2} = m\frac{V^2}{2}.$$

При значениях $m = 0.2,\ C = 100,\ V = 6$ имеем квадратное уравнение

$$50r^2 - \sqrt{2}r - 1.8 = 0$$

Решение $r = 0.2$ м с точностью два знака после десятичной точки.

$$x_1 = 3 - \frac{1+\sqrt{3}}{4} \times \frac{36}{10} \approx 0{,}54(\text{м})$$

$$y_1 = \frac{36}{4 \times 10} = 0{,}9\ (\text{м})$$

Ответ: $x_1 = 0.54$м, $y_1 = 0.9$м, $r = 0.2$м

№3 Обозначим угол между вектором V и восходящей вертикалью через φ. Спроектируем уравнения движения центра масс квадрокоптера на касательную и нормаль к траектории:

$$\begin{aligned} ma_\tau &= 0 = -F_a - mg\cos\varphi + F_T\cos(\varphi-\theta) \\ ma_n &= \frac{mV^2}{R} = -mg\sin\varphi + F_T\sin(\varphi-\theta) \end{aligned} \qquad (1)$$

Отсюда получаем:

$$F_T^2 = \left(mg\cos\varphi + cV^2\right)^2 + \left(\frac{mV^2}{R} + mg\sin\varphi\right)^2 =$$

$$= m^2g^2 + \left(\frac{m^2}{R^2} + c^2\right)V^4 + 2\frac{m^2V^2g}{R}\sin\varphi + 2mgcV^2\cos\varphi =$$

$$= m^2g^2 + \left(\frac{m^2}{R^2} + c^2\right)V^4 + 2mgV^2\sqrt{\frac{m^2}{R^2} + c^2}\,\sin(\varphi+\Phi),$$

$$\Phi = \operatorname{arctg}\frac{Rc}{m}$$

Следовательно,

$$F_{T\min} = \sqrt{m^2g^2 + \left(\frac{m^2}{R^2} + c^2\right)V^4 + 2mgV^2\sqrt{\frac{m^2}{R^2} + c^2}},$$

$$F_{T\max} = \sqrt{m^2g^2 + \left(\frac{m^2}{R^2} + c^2\right)V^4 - 2mgV^2\sqrt{\frac{m^2}{R^2} + c^2}}$$

Из (1) имеем:

$$cV^2\sin(\varphi-\theta) + mg\cos\varphi\sin(\varphi-\theta) - \frac{mV^2}{R}\cos(\varphi-\theta) - mg\sin\varphi\cos(\varphi-\theta) = 0 \Rightarrow$$

$$cV^2\sin\varphi\cos\theta - cV^2\cos\varphi\sin\theta - mg\sin\theta - \frac{mV^2}{R}\cos\varphi\cos\theta - \frac{mV^2}{R}\sin\varphi\sin\theta = 0 \Rightarrow$$

$$cV^2\sin\varphi - cV^2\cos\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta - mg\,\mathrm{tg}\,\theta - \frac{mV^2}{R}\cos\varphi - \frac{mV^2}{R}\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg}\,\theta = V^2\frac{cR\sin\varphi - m\cos\varphi}{cV^2R\cos\varphi + mgR + mV^2\sin\varphi}$$

Угол φ поворота вектора скорости центра масс меняется равномерно, причем в начальный момент он равен $\pi/2$, значит,

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{Vt}{R}$$

Следовательно, учитывая, что угол θ при нормальном полете квадрокоптера не превышает по модулю $\pi/2$, находим:

$$\mathrm{tg}\,\theta = V^2\frac{cR\cos\frac{Vt}{R} - m\sin\frac{Vt}{R}}{cV^2R\sin\frac{Vt}{R} + mgR + mV^2\cos\frac{Vt}{R}}$$

№4

А) Вычислим длину AD:

$$AD = \pi \times 20 \times 10 \approx 3 \times 200 = 600 \text{ (см)}$$

$$600 \text{ см} = 6 \text{ м}$$

Длина ломаной равна:

$$P = 6 + 3 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} = 13{,}5 + 3\sqrt{3} \text{ (м)}$$

Длина трассы равна:

$$L = \left(13{,}5 + 3\sqrt{3}\right) \times 4 = 54 + 12\sqrt{3} \text{ (м)}$$

Ответ: $54 + 12\sqrt{3}$ м

Б)

Проведя вычисления, можно посчитать градусные меры всех углов трапеции.

Вариант 1.

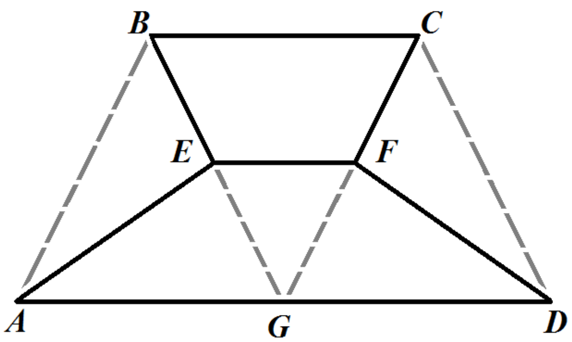
Обходить можно так:

E-B-C-F-E-A-D-F

Если поворот происходит в вершине угла, градусная мера которого меньше 180°, то величина угла поворота будет равна разности 180° и величины угла.

Тогда сумма углов поворота робота будет равна:

120°+120°+60°+30°+150°+150°=630°



Вариант 2.

Обходить можно так:

A-E-F-C-B-E-F-D-A

Тогда сумма углов поворота робота будет равна:

$$(180-150)^\circ+(180-120)^\circ+(180-60)^\circ+(180-60)^\circ+(180-120)^\circ+(180-150)^\circ+(180-30)^\circ=570^\circ$$

Ответ: 570°