2№1(20 баллов) В 10 классе «А» все обучающиеся знают хотя бы один из трех языков программирования – Си, Паскаль и Питон. Си знают 80% обучающихся, Паскаль – 70%, а Питон – 60%. Каким может быть процент обучающихся, знающих все три языка программирования?

А) Определите наименьший возможный процент обучающихся.

Б) Определите наибольший возможный процент обучающихся.

Ответ:

А) 10%;

Б) 55%;

Решение:

А) Количество обучающихся, которые не знаю Си равно 100% - 80% = 20%, тех, кто не знает Паскаль – 30%, тех, кто не знает Питон – 40%.

Соответственно тех, кто не знает три языка программирования не может превышать

$$20\% + 30\% + 40\% = 90\%$$

Значит, все три языка программирования знают как минимум

$$100\% - 90\% = 10\%$$

Б) Составим уравнение, воспользовавшись формулой включения-исключения для трех множеств:

Пусть x% обучающихся, которые знают ровно два языка программирования, тогда

$$|A| + |B| + |C| - x\% - 2 \times |A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - x\% - |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq |A| + |B| + |C| - |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq 80\% + 70\% + 60\% - 100\%$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq 110\%$$

$$|A \cap B \cap C| \leq 55\%$$

Значит, обучающихся, которые владеют всеми тремя языками программирования может быть 55%.

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы

№	Критерии проверки	Баллы
Пункт А		
1	Приведено полностью верное решение	10
2	В логически верном решении содержится одна арифметическая ошибка	5
3	**Дан верный ответ без решения (10%)**	**5**
4	Участник не приступил к решению или же решение содержит более одной ошибки	
Пункт Б		
5	Приведено полностью верное решение	10
6	В логически верном решении содержится одна арифметическая ошибка	5
7	**Дан верный ответ без решения (55%)**	**5**
8	Участник не приступил к решению или же решение содержит более одной ошибки	0

№2 (15 баллов) На одном острове живут только мудрецы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Группа из 30 островитян встала в круг. Каждый из них говорит: «Двое ближайших слева от меня и двое ближайших справа от меня - лжецы».

Каково максимально возможное количество лжецов находится в кругу?

Ответ: 24

Решение:

Если каждый человек в кругу – лжец, то все утверждения верны, что невозможно. Поэтому должен быть хотя бы один мудрец.

Этот мудрец должен быть окружен двумя лжецами с каждой стороны:

Л - Л - М - Л - Л

Поскольку мы пытаемся разместить как можно больше лжецов, то сколько лжецов может поместиться с обеих сторон? Если мы добавим еще троих, то получим лжеца, который выскажет истинное утверждение. А это невозможно.

Значит, реализуется следующий вариант – два лжеца, а затем мы должны поставить одного мудреца:

Л - Л - М - Л - Л - Л - Л - М

Затем за мудрецом должны следовать два лжеца:

Л - Л - М - Л - Л - Л - Л – М – Л – Л

Таким образом, шаблон Л - Л - М - Л - Л будет повторяться через каждых пятерых островитян. Значит, 4 из 5 человек могут быть лжецами. Это дает нам максимум

$$30 : 5 \times 4 = 6 \times 4 = 24 \text{ лжеца}$$

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	15
2	Приведено верное решение, но допущена одна арифметическая ошибка в вычислениях	8
3	**Дан верный ответ без решения (24 лжеца)**	**5**
4	Участник не приступил к решению или допустил более одной ошибки в решении	0

№3 (20 баллов) Робот находится у основания наклонной плоскости в точке А (см. *схема полигона*). Он должен попасть снарядом в цель, которая находится на наклонной плоскости в точке В. Расстояние АВ = 5 м. Угол наклона плоскости к горизонту равен β=30°, стрельба происходит под углом α = 60° к горизонту.

Сопротивлением воздуха пренебрегите. Ускорение свободного падения в расчетах примите $g \approx 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

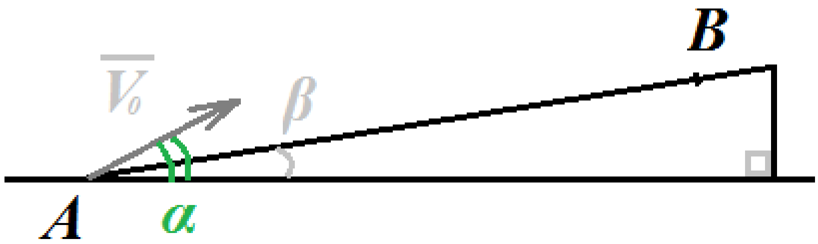


Схема полигона

А) Определите, чему должна быть равна начальная скорость снарядов V_0, чтобы они приземлялись в точке В?

Б) Определите время полета снаряда.

Ответ:

$$\text{А)}V_0 = \sqrt{\frac{L\,g\cos^2\beta}{2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{5\times 10\times\cos^2 30°}{2\sin(60°-30°)\cos(60°)}} = \sqrt{\frac{5\times 10\times\frac{3}{4}}{2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}} =$$

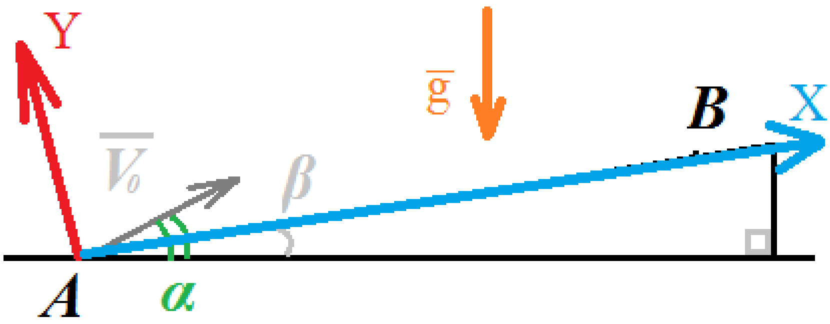
$$= \sqrt{\frac{5\times 10\times 3}{2}} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$\text{Б) } t = \sqrt{\frac{2L\sin(\alpha-\beta)}{g\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\times 5\times\sin 30°}{10\times\cos 60°}} = \sqrt{\frac{10\times\frac{1}{2}}{10\times\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1\ \text{с}$$

Решение:

Выберем систему координат.

Удобно разместить начало отсчета в точке старта снаряда, ос OY направить перпендикулярно поверхности наклонной плоскости, а ос OX вдоль наклонной плоскости:



Запишем уравнение радиус-вектора снаряда:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{V_0}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

Спроецируем данное уравнение на выбранные оси.

На ось OX:

$$x = 0 + V_0 t\cos(\alpha - \beta) - \frac{gt^2 \sin\beta}{2} (1)$$

На ось OY:

$$y = 0 + V_0 t\sin(\alpha - \beta) - \frac{g\, t^2 \cos\beta}{2} (2)$$

Чтобы определить время полета, приравняем уравнение координаты Y (2) к нулю:

$$V_0 t_п \sin(\alpha - \beta) - \frac{g\, t_п^2 \cos\beta}{2} = 0$$

Данное уравнение умеет два корня:

Значение $t_п = 0$ – это момент начала движения.

А время полета будет равно:

$$t_п = \frac{2V_0 \sin(\alpha - \beta)}{g\cos\beta} (3)$$

Поскольку мы не знаем начальную скорость, но знаем дальность полета, то подставим выражение (3) в уравнение для координаты X и получим:

$$L = V_0 \left(\frac{2V_0 \sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}\right)\cos(\alpha-\beta) - \frac{g\sin\beta}{2}\left(\frac{2V_0\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}\right)^2$$

Из данного уравнения мы определим V_0:

$$V_0 = \sqrt{\frac{L\,g\cos^2\beta}{2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha)}}\ (4)$$

Теперь, подставив выражение для начальной скорости (4) в выражение для времени полета (3), можно найти выражение для времени полета снаряда:

$$t_{п} = \frac{2\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}\sqrt{\frac{L\,g\cos^2\beta}{2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha)}}$$

Упростив данное выражение, получим:

$$t = \sqrt{\frac{2L\sin(\alpha-\beta)}{g\cos(\alpha)}}$$

Подсчитаем значения искомых величин:

$$V_0 = \sqrt{\frac{L\,g\cos^2\beta}{2\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{5\times10\times\cos^2 30°}{2\sin(60°-30°)\cos(60°)}} = \sqrt{\frac{5\times10\times\frac{3}{4}}{2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5\times10\times3}{2}} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66\,\frac{м}{с}$$

$$t = \sqrt{\frac{2L\sin(\alpha-\beta)}{g\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\times5\times\sin30°}{10\times\cos60°}} = \sqrt{\frac{10\times\frac{1}{2}}{10\times\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1\ с$$

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	20 баллов
2.1	Верно записано уравнение изменения координаты X снаряда	+2 балла
2.2	Верно записано уравнение изменения координаты Y снаряда	+2 балла
2.3	Верно указано условие, при котором из уравнений для координат можно получить уравнение для определения время полета снаряда	+2 балла
2.4	Верно выражено время полета через начальную скорость снаряда $$t_п = \frac{2V_0 \sin(\alpha - \beta)}{g \cos\beta}$$	+2 балла
2.5	Верно определено выражение для подсчета начальной скорости снаряда $$V_0 = \sqrt{\frac{L\, g \cos^2 \beta}{2\sin(\alpha - \beta)\cos(\alpha)}}$$	+4 балла
2.6	Верно определено выражение для подсчета времени полета снаряда $$t = \sqrt{\frac{2L \sin(\alpha - \beta)}{g \cos(\alpha)}}$$	+4 балла
2.7	Верно подсчитано значение начальной скорости ($\approx 8{,}66 \frac{м}{с}$)	+2 балла
2.8	Верно посчитано значение времени полета снаряда (1 с)	+2 балла
2.9	В ходе верного логически решения была допущена одна ошибка	-2 балла
3	**Дан верный ответ на пункт А без решения** **($\approx 8{,}66 \frac{м}{с}$)**	**5 баллов**
4	**Дан верный ответ на пункт Б без решения** **(1 с)**	**5 баллов**
5	Участник не приступил к решению	0 баллов

№4 (15 баллов) Абсолютно твёрдый стержень длиной ***R*** может вращаться вокруг проходящей через один из его концов вертикальной оси. В оси вращения к стержню приложены силы, препятствующие его вращению. Момент этих сил относительно вертикальной оси ***Q=const***. Стержень не имеет массы, но на его другом конце крепится материальная точка массы ***m***. В начальный момент времени стержень покоится. Ударив по материальной точке молоточком, можно мгновенно, не сдвинув стержень с места, придать ему угловую скорость **ω**. Какова должна быть эта скорость **ω**, чтобы стержень после удара совершил не менее ***n*** оборотов вокруг своей оси?

Ответ:

$$\omega \geq \frac{2}{R}\sqrt{\frac{\pi n Q}{m}}$$

Решение:

Кинетическая энергия стержня после удара по нему молоточком равна

$$T = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 \ (1)$$

Работа A момента Q сил сопротивления вращению стержня за n его оборотов вокруг своей оси равна

$$A = 2\pi n Q \ (2)$$

Условие, при котором стержень совершит не менее n оборотов вокруг своей оси, имеет вид:

$$T \geq A$$

Подставим в данное неравенства выражения (1) и (2):

$$\frac{1}{2}m(\omega R)^2 \geq 2\pi n Q$$

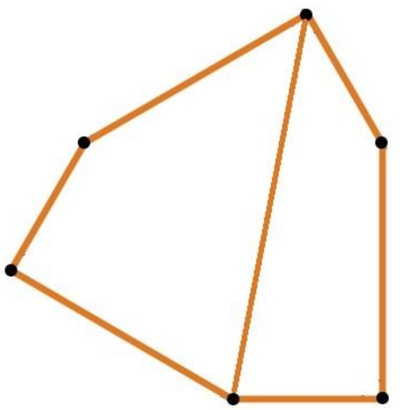
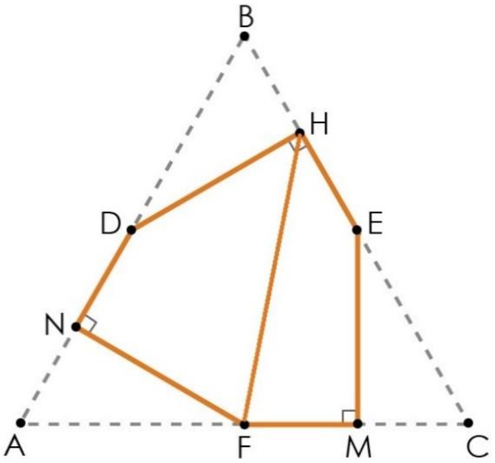
Выразим из данного неравенства угловую скорость:

$$(\omega R)^2 \geq \frac{4\pi n Q}{m}$$

$$\omega \geq \frac{2}{R}\sqrt{\frac{\pi n Q}{m}}$$

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	15 баллов
2.1	Правильно определена кинетическая энергия стержня после удара $$T=\frac{1}{2}m(\omega R)^2$$	+3 балл
2.2	Правильно определена работа A момента Q сил сопротивления вращению стержня за n его оборотов вокруг своей оси равна $$A=2\pi nQ$$	+4 балл
2.3	Правильно определено условие, при котором стержень совершит не менее n оборотов вокруг своей оси, имеет вид: $$T\geq A$$	+3 балла
2.4	Получено верное выражение для угловой скорости: $$\omega\geq\frac{2}{R}\sqrt{\frac{\pi nQ}{m}}$$	+5 баллов
3	**Дан верный ответ без решения** $$\omega\geq\frac{2}{R}\sqrt{\frac{\pi nQ}{m}}$$	**5 баллов**
4	Участник не приступил к решению	0 баллов

№5 (30 баллов) Робот движется по гладкой горизонтальной поверхности и наносит на нее изображение (см. *логотип*) при помощи кисти, закрепленной в центре колесной базы. Робот оснащен двумя отдельно управляемыми колесами, расстояние между центрами колес составляет 50 см, диаметр каждого из двух колес равен 10 см, максимальная скорость вращения моторов 2 об/с.

	
Логотип	*Дополнительные построения*

Робот должен изобразить фигуру, состоящую из семи отрезков (см. *логотип*). Чтобы определить их положение, необходимо провести ряд вспомогательных построений.

Известно, что в правильный треугольник ABC (см. *дополнительные построения*) AB = 4 м. D середина стороны AB, E – середина BC, F – середина AC. Из точки D на сторону BC опустили перпендикуляр DH. Из точки E на сторону AC опустили перпендикуляр EM. Из точки F на сторону AB опустили перпендикуляр FN. В образовавшемся шестиугольнике проведена диагональ HF.

Робот стартует из точки H. Из-за крепления кисти робот не может двигаться назад. Все развороты робот должен совершать на месте, то есть все развороты робота – танковые.

При расчетах примите $\pi \approx 3{,}14$.

А) Определите, чему равна длина траектории. Ответ дайте в метрах.

Б) Определите, за какое минимальное время робот начертит данную фигуру. Ответ дайте в секундах.

Ответ:

А) $L = 3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7} \approx 10{,}84$ м

Б) $t = \dfrac{3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7}}{3{,}14 \times 0{,}1 \times 2} + \dfrac{(90° + 30°) \times 2 + 131° + 30°}{360°} \times \dfrac{3{,}14 \times 0{,}5}{3{,}14 \times 0{,}1 \times 2} \approx 20\ c$

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике
Очный этап
10-11 классы

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	30
	Пункт А	
2.1	Доказано, что углы ∠NFA=∠BDH=∠MEC=30°	+2 балла
2.2	Верно вычислены длины отрезков DN=HE=MF=1 м	+2 балла
2.3	Верно определены длины отрезков DH=EM=NF=$\sqrt{3}$ м	+2 балла
2.4	Верно определена длина отрезка HF=$\sqrt{7}$ м	+3 балла
2.5	Верно определена длина траектории $L = 3 + 3\sqrt{3} + \sqrt{7} \approx 10{,}84$ м	+2 балла
2.6	Приведено логически верное решение, но допущена одна ошибка в вычислениях	**-2** балла
	Пункт Б	
3.1	Правильно определена длина обода колеса $\pi d = \pi \times 0{,}1 = 3{,}14 \times 0{,}1 = 0{,}314 \text{ м} = 31{,}4 \text{ см}$	+1 балл
3.2	Правильно определена максимальная скорость движения робота $\pi d w = 0{,}314 \times 2 = 0{,}2\pi = 0{,}628 \frac{\text{м}}{\text{с}} = 62{,}8 \frac{\text{см}}{\text{с}}$	+1 балл
3.3	Верно определены углы ∠FHC и ∠HFC: Из треугольника FHC $\frac{HF}{\sin\angle HCF} = \frac{FC}{\sin\angle FHC} = \frac{HC}{\sin\angle HFC}$ $\sin\angle FHC = \frac{FC}{HF} \times \sin\angle HCF = \frac{2}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{\frac{3}{7}}$ $\angle FHC = arcsin\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right) \approx 41°$ $\angle HFC = 180° - (60° + 41°) = 79°$	+5 баллов
3.4	Верно определен углы ∠DHF и ∠NFH: $\angle DHF = 180° - (90° + 41°) = 49°$ $\angle NFH = 180° - (30° + 79°) = 71°$	+3 балла
3.5	При расчете суммарного угла допорота робота, участник использует не величины углов многоугольника, а величины углов, дополняющих углы многоугольника до 180°	+3 балла
3.6	Верно определен минимально необходимый суммарный угол поворота робота $(90° + 30°) \times 2 + 131° + 30° = 401°$	+3 балла

3.7	Верно определено время, которое робот потратит, чтобы проехать по линиям трассы $$\frac{3+3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{3{,}14\times 0{,}1\times 2}\approx 17{,}26\ \text{c}$$	+1 балл
3.8	Верно определено время, которое робот потратит на развороты $$\frac{(90°+30°)\times 2+131°+30°}{360°}\times\frac{3{,}14\times 0{,}5}{3{,}14\times 0{,}1\times 2}\approx 2{,}78\ \text{c}$$	+1 балл
3.9	Правильно определено минимальное время, за которое робот начертит данную фигуру (20 с)	+1 балл
3.10	В ходе логически верного решения была допущена одна арифметическая ошибка	-2 балла
4	**Приведено логически верное решение для не оптимального варианта прохождения трассы**	**25**
5	**Дан верный ответ на пункт А без решения (≈10,84 м)**	**5**
6	**Дан верный ответ на пункт Б без решения (20 с)**	**5**
7	Участник не приступил к решению	0

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы В2

№1 (20 баллов) Перед соревнованиями участникам раздали анкеты, в которых в одном из вопросов нужно было выбрать, каким из перечисленных языков программирования владеет респондент. После обработки ответов оказалось, что все участники знают хотя бы один из трех языков программирования – Си, Бейсик и Питон. Си знают 90% опрошенных, Бейсик – 80%, а Питон – 70%. Каким может быть процент опрошенных, знающих все три языка программирования?

А) Определите наименьший возможный процент.

Б) Определите наибольший возможный процент.

Ответ:

А) 40%;

Б) 70%;

Решение:

А) Количество обучающихся, которые не знают Си, равно 100% - 90% = 10%, тех, кто не знает Бейсик – 20%, тех, кто не знает Питон – 30%.

Соответственно, процент тех, кто не знает три языка программирования, не может превышать

$$10\% + 20\% + 30\% = 60\%$$

Значит, все три языка программирования знают, как минимум,

$$100\% - 60\% = 40\%$$

Б) Составим уравнение, воспользовавшись формулой включения-исключения для трех множеств:

Пусть x% обучающихся, которые знают ровно два языка программирования, тогда

$$|A| + |B| + |C| - x\% - 2 \times |A \cap B \cap C| = |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - x\% - |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq |A| + |B| + |C| - |A \cup B \cup C|$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq 90\% + 80\% + 70\% - 100\%$$

$$2 \times |A \cap B \cap C| \leq 140\%$$

$$|A \cap B \cap C| \leq 70\%$$

Значит, обучающихся, которые владеют всеми тремя языками программирования, может быть 70%.

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике

Очный этап

10-11 классы В2

№	Критерии проверки	Баллы
Пункт А		
1	Приведено полностью верное решение	10
2	В логически верном решении содержится одна арифметическая ошибка	5
3	**Дан верный ответ без решения (40%)**	**5**
4	Участник не приступил к решению или же решение содержит более одной ошибки	0
Пункт Б		
5	Приведено полностью верное решение	10
6	В логически верном решении содержится одна арифметическая ошибка	5
7	**Дан верный ответ без решения (70%)**	**5**
8	Участник не приступил к решению или же решение содержит более одной ошибки	0

№2 (15 баллов) На одном острове живут только мудрецы, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут.

Группа из 30 островитян встала в круг. Каждый из них говорит: «Человек слева от меня и человек справа от меня - лжецы».

Каково максимально возможное количество лжецов находится в кругу?

Ответ: 20

Решение:

Если каждый человек в кругу – лжец, то все утверждения верны, что невозможно. Поэтому должен быть хотя бы один мудрец.

Чтобы достичь максимального количества лжецов, мы должны, по крайней мере, поместить двух лжецов рядом друг с другом:

Л - Л

Но, тогда мудрецы с каждой стороны мы должны добавить по мудрецу:

М – Л – Л – М

Чтобы высказывания мудрецов были истинными, они должны быть окружены лжецами с обеих сторон:

Л – М – Л – Л – М – Л

Мы можем продолжить наши рассуждения дальше и получим, что между двумя мудрецами будут находиться два лжеца.

Л – Л – М – Л – Л – М – Л – Л – М – Л - …

Следовательно, в группе из трех человек на одного мудреца будут приходиться два лжеца. Значит, в кругу может быть максимум 20 лжецов:

$$30 : 3 \times 2 = 20$$

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	15
2	Приведено верное решение, но допущена одна арифметическая ошибка в вычислениях	8
3	**Дан верный ответ без решения (20 лжецов)**	**5**
4	Участник не приступил к решению или допустил более одной ошибки в решении	0

№3 (20 баллов) Робот находится на наклонной плоскости в точке В (см. *схему полигона*). Он должен попасть снарядом в цель, которая находится у основания наклонной плоскости в точке А. Расстояние АВ равно 5 м. Угол наклона плоскости к горизонту равен $\alpha = 30°$, стрельба происходит под углом α к горизонту.

Сопротивлением воздуха пренебрегите. Ускорение свободного падения в расчетах примите $g \approx 10\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

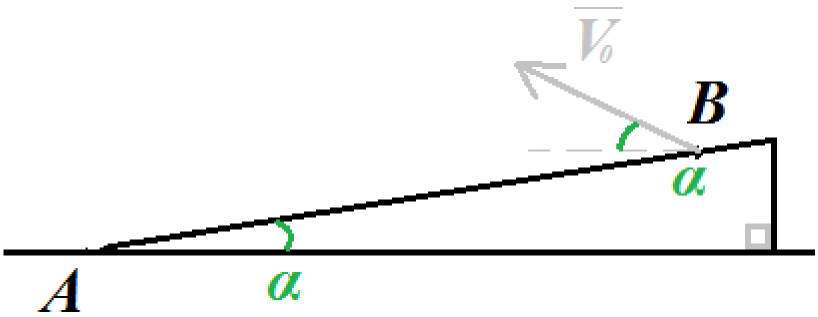


Схема полигона

А) Определите, чему должна быть равна начальная скорость снаряда V_0, чтобы он приземлился в точке А?

Б) Определите время полета снаряда.

Ответ:

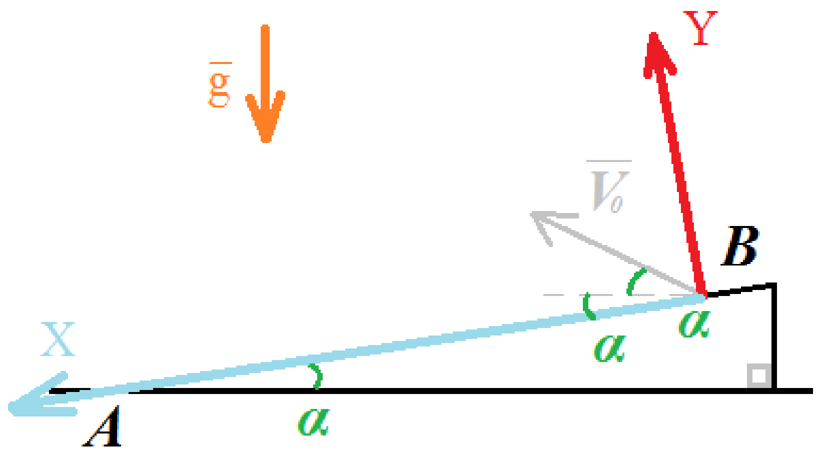
$$А)V_0 = \sqrt{\frac{Lg\,cos(\alpha)}{2\sin(2\alpha)}} = \sqrt{\frac{5\times 10\times cos(30°)}{2\sin(60°)}} = \sqrt{\frac{5\times 10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{5\times 10}{2}} = \sqrt{25} = 5\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$$Б)\ t = \sqrt{\frac{2L}{g}\times\frac{\sin\,(2\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\times 5}{10}\times\frac{\sin\ 60°}{\cos\ 30°}} = \sqrt{\frac{2\times 5}{10}\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1\ \text{с}$$

Решение:

Выберем систему координат.

Удобно разместить начало отсчета в точке старта снаряда, ось OY направить перпендикулярно поверхности наклонной плоскости, а ось OX вдоль наклонной плоскости:



Запишем уравнение радиус-вектора снаряда:

$$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{V_0}t + \frac{\vec{g}t^2}{2}$$

Спроецируем данное уравнение на выбранные оси.

На ось OX:

$$x = 0 + V_0 t\cos(2\alpha) + \frac{gt^2\sin\alpha}{2} (1)$$

На ось OY:

$$y = 0 + V_0 t\sin(2\alpha) - \frac{g\,t^2\cos\alpha}{2} (2)$$

Чтобы определить время полета, приравняем уравнение координаты Y (2) к нулю:

$$V_0 t_п \sin(2\alpha) - \frac{g\,t_п^2\cos\alpha}{2} = 0$$

Данное уравнение умеет два корня:

Значение $t_п = 0$ – это момент начала движения.

А время полета будет равно:

$$t_п = \frac{2V_0\sin(2\alpha)}{g\cos\alpha} (3)$$

Поскольку мы не знаем начальную скорость, но знаем дальность полета, то подставим выражение (3) в уравнение для координаты X и получим:

$$L = V_0\left(\frac{2V_0\sin(2\alpha)}{g\cos\alpha}\right)\cos(2\alpha) + \frac{g\sin\alpha}{2}\left(\frac{2V_0\sin(2\alpha)}{g\cos\alpha}\right)^2$$

Из данного уравнения мы определим V_0:

$$V_0 = \sqrt{\frac{Lg\,cos(\alpha)}{2\sin(2\alpha)}}\ (4)$$

Теперь, подставив выражение для начальной скорости (4) в выражение для времени полета (3), можно найти выражение для времени полета снаряда:

$$t_п = \frac{2\sin(2\alpha)}{g\cos\alpha}\sqrt{\frac{Lg\,cos(\alpha)}{2\sin(2\alpha)}}$$

Упростив данное выражение, получим:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}\times\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$

Подсчитаем значения искомых величин:

$$V_0 = \sqrt{\frac{Lg\,cos(\alpha)}{2\sin(2\alpha)}} = \sqrt{\frac{5\times10\times cos(30°)}{2\sin(60°)}} = \sqrt{\frac{5\times10\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2\times\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{5\times10}{2}} = \sqrt{25} = 5\,\frac{м}{с}$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}\times\frac{\sin(2\alpha)}{\cos(\alpha)}} = \sqrt{\frac{2\times5}{10}\times\frac{\sin\ 60°}{\cos\ 30°}} = \sqrt{\frac{2\times5}{10}\times\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{10}{10}} = 1\ с$$

Олимпиада Ломоносов по Робототехнике
Очный этап
10-11 классы В2

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	20 баллов
2.1	Верно записано уравнение изменения координаты X снаряда	+2 балла
2.2	Верно записано уравнение изменения координаты Y снаряда	+2 балла
2.3	Верно указано условие, при котором из уравнений для координат можно получить уравнение для определения время полета снаряда	+2 балла
2.4	Верно выражено время полета через начальную скорость снаряда $$t_{п} = \frac{2V_0 \sin(2\alpha)}{g \cos\alpha}$$	+2 балла
2.5	Верно определено выражение для подсчета начальной скорости снаряда $$V_0 = \sqrt{\frac{Lg\,cos(\alpha)}{2\sin(2\alpha)}}$$	+4 балла
2.6	Верно определено выражение для подсчета времени полета снаряда $$t = \sqrt{\frac{2L}{g} \times \frac{\sin\,(2\alpha)}{\cos(\alpha)}}$$	+4 балла
2.7	Верно подсчитано значение начальной скорости ($5\,\frac{м}{с}$)	+2 балла
2.8	Верно посчитано значение времени полета снаряда (1 с)	+2 балла
2.9	В ходе верного логически решения была допущена одна ошибка	-2 балла
3	**Дан верный ответ на пункт А без решения** **($5\,\frac{м}{с}$)**	**5 баллов**
4	**Дан верный ответ на пункт Б без решения** **(1 с)**	**5 баллов**
5	Участник не приступил к решению	0 баллов

№4 (15 баллов) Какова должна быть линейная скорость робота для того, чтобы он мог ехать по внутренней поверхности кругового цилиндра по горизонтальной окружности. Высота цилиндра равна H, диаметр цилиндра равен D, масса робота равна m, коэффициент трения между шинами робота и внутренней поверхностью цилиндра равен μ.

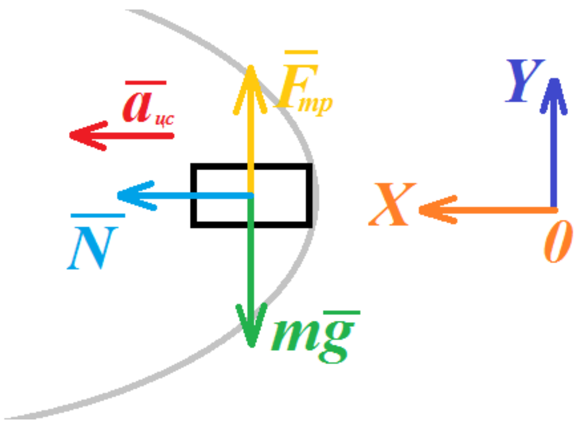
Ответ:

$$V \geq \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$$

Решение:

Найдем наименьшую линейную скорость, которая будет удовлетворять условию задачи, тогда ответом на вопрос задачи будет скорость, равная и выше найденного значения.

Сделаем рисунок



Запишем уравнение сил, действующих на робота:

$$\vec{N} + \overrightarrow{F_{тр}} + m\vec{g} = m\overrightarrow{a_{цс}}$$

Спроецируем уравнение на оси координат.

OX: $N + 0 + 0 = ma_{цс}$ (1)

$OY: 0 + F_{тр} - mg = 0$ (2)

Так как

$$F_{тр} = \mu N$$

то мы можем найти соотношение между ускорением свободного падения и центростремительным ускорением:

$$\mu a_{цс} = g \ (3)$$

Так как

$$a_{\text{цс}} = \frac{V^2}{R} \, (4) \ \text{ и } \ R = \frac{D}{2} \ (5)$$

Подставим (4) и (5) в выражение (3) и получим

$$\mu \frac{V^2}{\frac{D}{2}} = g$$

Выразим скорость робота

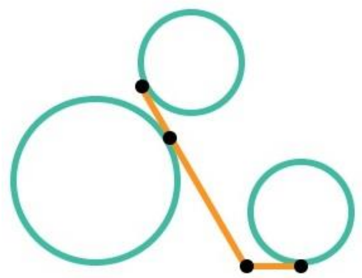
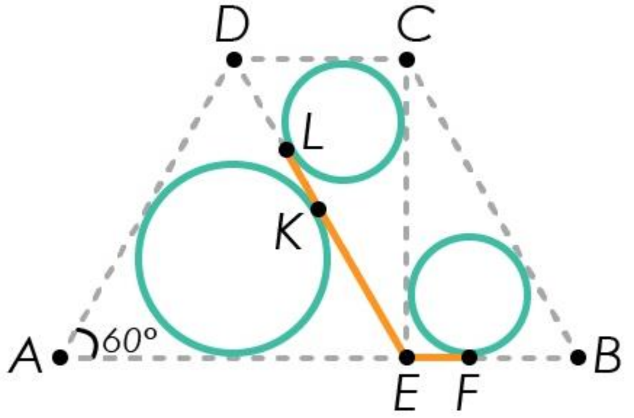
$$V = \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$$

Значит, искомая линейная скорость будет выше или равна найденной:

$$V \geq \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$$

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	15 баллов
2.1	Верно сделан рисунок	+2 балла
2.2	Верно записано уравнение сил, действующих на робота $\vec{N} + \overrightarrow{F_{\text{тр}}} + m\vec{g} = m\overrightarrow{a_{\text{цс}}}$	+2 балла
2.3	Верно спроецировано уравнение на ось OX	+2 балла
2.4	Верно спроецировано уравнение на ось OY	+2 балла
2.5	Верно указана связь силы трения и силы реакции опоры	+2 балла
2.6	Получено верное выражение для минимальной линейной скорости: $V = \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$	+3 балла
2.7	Верно указаны все решения: $V \geq \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$	+2 балла
3	**Дан верный ответ без решения** $V \geq \sqrt{\frac{gD}{2\mu}}$	**5 баллов**
4	Участник не приступил к решению	0 баллов

№5 (30 баллов) Робот движется по гладкой горизонтальной поверхности и наносит на нее изображение (см. *логотип*) при помощи кисти, закрепленной в центре колесной базы. Робот оснащен двумя отдельно управляемыми колесами, длина колесной базы составляет 40 см, диаметр колеса робота 10 см, максимальная скорость вращения моторов 2 об/с.

	
Логотип	*Дополнительные построения*

Робот должен изобразить фигуру, состоящую из трех окружностей и двух отрезков (см. *логотип*). Чтобы определить их положение, необходимо провести ряд вспомогательных построений.

Известно, что в трапеции ABCD (см. *дополнительные построения*) с основаниями AB и CD (AB> CD), боковая сторона AD = 4 м, $\angle A = 60°$. Из вершины D провели прямую, параллельную стороне CB, которая пересекла нижнее основание AB в точке E. Затем провели отрезок CE. В треугольники ADE, DCE и ECB вписаны окружности.

Точка F – это точка касания окружности, вписанной в треугольник BCE, стороны BE.

Точка K – это точка касания окружности, вписанной в треугольник ADE, стороны DE.

Точка L – это точка касания окружности, вписанной в треугольник DCE, стороны DE.

Известно, что в трапецию ABCD можно вписать окружность, а также вокруг трапеции ABCD можно описать окружность.

Из-за крепления кисти робот не может двигаться назад. Все развороты робот должен совершать на месте, то есть все развороты робота – танковые.

При расчетах примите $\pi \approx 3,14$.

А) Определите, чему равна длина самопересекающейся линии, с помощью которой можно начертить данный логотип. Ответ дайте в метрах.

Б) Определите, за какое минимальное время робот начертит данную фигуру. Ответ дайте в секундах.

Ответ:

А) $\dfrac{LE+ED+2\pi R+2\times 2\pi r}{\pi dw}=2\sqrt{3}+4\pi\dfrac{4\sqrt{3}-3}{3}=2\sqrt{3}+4\times 3{,}14\times\dfrac{4\sqrt{3}-3}{3}\approx 19{,}9$ м

Б) $\dfrac{LE+ED}{\pi dw}+\dfrac{\pi D_{\text{база}}}{\pi dw}\times\dfrac{60^\circ}{360^\circ}+\dfrac{2\pi(R+\frac{D_{\text{база}}}{2})+2\times 2\pi(r+\frac{D_{\text{база}}}{2})}{\pi dw}=$

$$=\frac{2\sqrt{3}}{0{,}628}+\frac{1}{3}+\frac{16\sqrt{3}-8{,}4}{0{,}6}\approx 38\text{ с}$$

№	Критерии проверки	Баллы
1	Приведено полностью верное решение	30
	Пункт А	
2.1	Доказано, что трапеция ABCD – равнобедренная	+2 балла
2.2	Доказано, что треугольник ADE – равнобедренный	+2 балла
2.3	Доказано, что основание DC = 2 м	+2 балла
2.4	Подсчитана длина отрезка $CE=2\sqrt{3}$ м	+2 балла
2.5	Верно подсчитан радиус большей окружности $R=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ м	+2 балла
2.6	Верно посчитан радиус меньших окружностей $r=\sqrt{3}-1$ м	+2 балла
2.7	Верно определена длина отрезка $EF\ =\ r=\sqrt{3}-1$ м	+2 балла
2.8	Верно определена длина отрезка $$LE=\frac{4+2\sqrt{3}-2}{2}=1+\sqrt{3}\text{ м}$$	+2 балла
2.9	Верно подчитана длина самопересекающейся линии, с помощью которой можно начертить логотип: $$L=1+\sqrt{3}+\sqrt{3}-1+2\pi\frac{2\sqrt{3}}{3}+2\times 2\pi(\sqrt{3}-1)=$$ $$=2\sqrt{3}+4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}-1\right)=2\sqrt{3}+4\pi\frac{4\sqrt{3}-3}{3}=$$ $$=2\sqrt{3}+4\times 3{,}14\times\frac{4\sqrt{3}-3}{3}\approx 19{,}9\text{ м}$$	+2 балла
2.10	Приведено логически верное решение, но допущена одна ошибка в вычислениях	-2 балла
	Пункт Б	
3.1	Правильно определена длина обода колеса $$\pi d=\pi\times 0{,}1=3{,}14\times 0{,}1=0{,}314\text{ м}=31{,}4\text{ см}$$	+1 балл
3.2	Правильно определена максимальная скорость движения робота $$\pi dw=0{,}314\times 2=0{,}2\pi=0{,}628\frac{\text{м}}{\text{с}}=62{,}8\frac{\text{см}}{\text{с}}$$	+1 балл

3.3	Верно определено время проезда по прямым участкам: $\frac{LE+ED}{\pi dw}=\frac{2\sqrt{3}}{0{,}2\pi}=\frac{2\sqrt{3}}{0{,}628}\approx 5{,}52$ с	+2 балла
3.4	Верно определен минимально необходимый угол поворота робота 60°	+1 балл
3.5	Верно определено время, необходимое для разворота робота на месте: $\frac{\pi D_{база}}{\pi dw}\times\frac{60°}{360°}=\frac{D_{база}}{6dw}=\frac{0{,}4}{6\times 0{,}1\times 2}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ с	+2 балла
3.6	Верно определено время, которое робот потратит на проезд по дугам окружностей: $\frac{2\pi(R+\frac{D_{база}}{2})+2\times 2\pi(r\frac{D_{база}}{2})}{\pi dw}=\frac{2R+4r+3D_{база}}{dw}=$ $=\frac{2\times\frac{2\sqrt{3}}{3}+4\times\left(\sqrt{3}-1\right)+3\times 0{,}4}{0{,}1\times 2}=$ $=\frac{4\sqrt{3}+12\sqrt{3}-12+3{,}6}{0{,}6}=\frac{16\sqrt{3}-8{,}4}{0{,}6}\approx 32{,}19$ с	+3 балла
3.7	Правильно определено минимальное время, за которое робот начертит данную фигуру (38 с) $\frac{LE+ED}{\pi dw}+\frac{\pi D_{база}}{\pi dw}\times\frac{60°}{360°}+\frac{2\pi(R+\frac{D_{база}}{2})+2\times 2\pi(r+\frac{D_{база}}{2})}{\pi dw}=$ $=\frac{2\sqrt{3}}{0{,}628}+\frac{1}{3}+\frac{16\sqrt{3}-8{,}4}{0{,}6}\approx 38$ с	+2 балла
3.8	В ходе логически верного решения была допущена одна арифметическая ошибка	-2 балла
4	**Приведено логически верное решение для не оптимального варианта прохождения трассы**	**25**
5	**Дан верный ответ на пункт А без решения (≈19,9 м)**	**5**
6	**Дан верный ответ на пункт Б без решения (38 с)**	**5**
7	Участник не приступил к решению	0