

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2021/22 учебного года для 9 классов

Задача 1 (10 баллов)

В-1 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 7$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geq 2$. Найдите a_{2021} .

В-2 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 5$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geq 2$. Найдите a_{2022} .

В-3 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 4$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geq 2$. Найдите a_{2021} .

В-4 Последовательность (a_n) задана рекуррентно равенствами $a_1 = 8$, $a_n = a_{n-1} + 2n - 1$, $n \geq 2$. Найдите a_{2022} .

Задача 2 (10 баллов)

В-1 Первые 2023 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2021 сумму стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

В-2 Первые 2027 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2025 сумм стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

В-3 Первые 2031 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2029 сумм стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

В-4 Первые 2035 натуральных чисел выписаны в ряд в некотором порядке. Вычисляют 2033 суммы стоящих подряд трех чисел из этого ряда. Какое максимальное количество из этих сумм может быть нечетным?

Задача 3 (10 баллов)

В-1 Найдите сумму всех целочисленных значений a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = y^2 + 2ax, \\ |x - 10| + 2|y + 5| = 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

В-2 Найдите сумму всех целочисленных значений a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + a^2 = y^2 + 2ax, \\ 2|x - 9| + |y - 4| = 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

В-3 Найдите сумму всех целочисленных значений a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2ay = y^2 + a^2, \\ 2|x - 9| + |y - 4| = 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

В-4 Найдите сумму всех целочисленных значений a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + 2ay = y^2 + a^2, \\ 2|x + 4| + |y - 7| = 2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2021/22 учебного года для 9 классов

Задача 4 (10 баллов)

В-1 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наименьшее число красных ручек он мог купить?

В-2 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наибольшее число красных ручек он мог купить?

В-3 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наименьшее число зелёных ручек он мог купить?

В-4 В магазине продаются синие ручки по 14 рублей, красные — по 15 рублей и зелёные — по 16 рублей. Вася купил несколько ручек всех трёх цветов, потратив на них ровно 170 рублей. Какое наибольшее число зелёных ручек он мог купить?

Задача 5 (10 баллов)

В-1 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 24.

В-2 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

В-3 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 12.

В-4 В параллелограмме $ABCD$ точки E и F — середины сторон AD и CD соответственно. Пусть G и H — точки пересечения отрезков BE и BF соответственно с диагональю AC параллелограмма. Найдите площадь четырёхугольника $GHFE$, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 36.

Задача 6 (15 баллов)

В-1 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2 + 5xy - 2x^2 - 17y - 6x + 20 = 0, \\ 10y^2 - 2xy + 5x^2 - 38y - 6x + 41 = 0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y , являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

В-2 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2 + 5xy - 2x^2 - 17y - 5x + 3 = 0, \\ 10y^2 - 2xy + 5x^2 - 20y + 2x + 10 = 0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y , являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

В-3 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2 + 5xy - 2x^2 - 35y - 21x + 98 = 0, \\ 10y^2 - 2xy + 5x^2 - 98y + 245 = 0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y , являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

В-4 Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y^2 + 5xy - 2x^2 - 34y - 12x + 80 = 0, \\ 10y^2 - 2xy + 5x^2 - 76y - 12x + 164 = 0. \end{cases}$$

В ответе укажите минимальное значение y , являющееся решением системы, при необходимости округлив его до двух знаков после запятой.

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Отборочный этап 2021/22 учебного года для 9 классов

Задача 7 (15 баллов)

В-1 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 + xy - 2x^2 - 15y + 15x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y .

В-2 Решите уравнение в целых числах:

$$y^2 - 3xy + 2x^2 + 3y - 3x - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений y .

В-3 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 + xy - 2y^2 - 6x + 6y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x .

В-4 Решите уравнение в целых числах:

$$x^2 - 4xy + 3y^2 + 8x - 8y - 1 = 0.$$

В ответе укажите сумму всех найденных натуральных значений x .

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2021/22 учебного года для 9 классов

Задача 8 (20 баллов)

В-1 В неравностороннем треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 8. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-2 В неравностороннем треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 14. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-3 В неравностороннем треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если площадь треугольника ABC равна 10. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-4 В неравностороннем треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 7. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-5 В неравностороннем треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 9. При необходимости округлите ответ до сотых.

В-6 В неравностороннем треугольнике ABC один из углов равен разности двух других и один из углов в два раза больше другого. Биссектрисы углов A , B и C пересекают описанную вокруг треугольника окружность в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Найдите площадь треугольника ABC , если площадь треугольника $A_1B_1C_1$ равна 13. При необходимости округлите ответ до сотых.
