

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2021/22 учебного года для 9 класса

Задача 1. На гранях шестигранного игрального кубика расставлены числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Кубик бросают, и он падает на стол. После этого видны числа на всех гранях, кроме одной. Числа на пяти видимых гранях перемножаются. Найдите вероятность того, что это произведение делится на 16.

Задача 2. Найдите количество натуральных чисел, не превышающих 2022 и не входящих ни в арифметическую прогрессию 1, 3, 5, ..., ни в арифметическую прогрессию 1, 4, 7, ...

Задача 3. Найдите три последние цифры числа $10^{2022} - 9^{2022}$.

Задача 4. Семейство Дурслей скрывает Гарри Поттера на острове, который находится на расстоянии 9 км от берега. Берег прямолинейный. На берегу, в 15 километрах от той точки берега, которая ближе всего к острову, находится Хагрид на волшебном мотоцикле, и он хочет добраться до Гарри как можно быстрее. По побережью мотоцикл едет со скоростью 50 км/час, а над морем летит со скоростью 40 км/час. План у Хагрида такой: сначала проехать X километров по побережью, а потом взять курс напрямик на остров. Какое значение X наилучшим образом подходит для целей Хагрида?

Задача 5. Найдите все значения x , при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = x^3 - 100x, \quad b = x^4 - 16, \quad c = x + 20 - x^2$$

положительно (средним из трёх данных чисел a, b, c называется число v в тройке $u \leq v \leq w$, получаемой в результате упорядочения данных чисел по нестрогому возрастанию).

Задача 6. Точка A на плоскости находится на одинаковом расстоянии от всех точек пересечения двух парабол, заданных в декартовой системе координат на плоскости уравнениями $y = 3x^2 + 2$ и $x = 4y^2 + 2$. Найдите это расстояние.

Задача 7. Есть некоторое количество одинаковых целлофановых пакетов, которые можно вкладывать друг в друга. Если внутри одного из пакетов оказались все остальные пакеты, назовём такую ситуацию «пакетом пакетов». Посчитайте, сколькими способами можно сложить «пакет пакетов» из 10 пакетов.

Пояснение. Обозначим скобочками пакет.

Если у нас был один пакет, то способ сложить «пакет пакетов» всего один: $()$.

Два пакета тоже можно сложить всего одним способом: $(())$.

Три пакета можно сложить двумя разными способами: $(())()$ и $((()))$, и т.д.

Порядок пакетов внутри пакета неважен. Например, вариант $((()) ())$ не отличается от $(((()))$.