

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Заключительный этап 2021/22 учебного года для 10 класса

Задача 1. Найдите наименьшее натуральное число, обладающее следующим свойством: остаток от его деления на 20 на единицу меньше остатка от его деления на 21, а остаток от его деления на 22 равен 2.

Задача 2. Треугольная пирамидка, все рёбра которой имеют длину 6 см, стоит на плоском столе. Пирамидку перекатывают по столу через рёбра 6 раз таким образом, что одна из её вершин всё время остаётся неподвижной, при этом два раза подряд через одно и то же ребро пирамидку не перекатывают. Найдите длину траектории, по которой за время этих перекатываний перемещается подвижная вершина пирамиды.

Задача 3. Найдите три последние цифры числа $10^{2022} - 9^{2022}$.

Задача 4. По окружности выписаны 2022 единицы. Два игрока ходят по очереди: за один ход игрок стирает два соседних числа из написанных и пишет вместо них их сумму (один раз). Выигрывает тот, кто получит число 4. Если в конце игры остаётся одно число, не равное 4, игра оканчивается вничью. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе победу, и если да, то каким образом?

Задача 5. Число a таково, что уравнение $t^3 + 4t^2 + 4t + a = 0$ имеет три действительных корня $x < y < z$. Определите, какие числовые значения может принимать выражение

$$A = x^3 - 4y^2 - 4z^2 - 4y - 4z + 32.$$

Задача 6. Найдите координаты всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от всех точек пересечения парабол, заданных в декартовой системе координат на плоскости уравнениями $y = 2x^2 - 1$ и $x = 4y^2 - 2$.

Задача 7. Есть некоторое количество одинаковых целлофановых пакетов, которые можно вкладывать друг в друга. Если внутри одного из пакетов оказались все остальные пакеты, назовём такую ситуацию «пакетом пакетов». Посчитайте, сколькими способами можно сложить «пакет пакетов» из 10 пакетов.

Пояснение. Обозначим скобочками пакет.

Если у нас был один пакет, то способ сложить «пакет пакетов» всего один: $()$.

Два пакета тоже можно сложить всего одним способом: $(())$.

Три пакета можно сложить двумя разными способами: $(())()$ и $((()))$, и т.д.

Порядок пакетов внутри пакета неважен. Например, вариант $((()) ())$ не отличается от $(((()))$.