Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Задача 1. Три друга-штангиста А, Б и В приехали на соревнования. Они все соревновались в одной весовой категории, и один из них стал победителем. Если вес, поднятый штангистом А, сложить с весом, поднятым штангистом Б, получится 220 кг, если сложить веса, поднятые штангистами А и В, то получится 240 кг, а если сложить веса, поднятые штангистами Б и В, то получится 250 кг. Какой вес поднял победитель соревнований?

Ответ: 135.

Решение. Сумма трех весов равна $(220+240+250)/2 = 355$. Поэтому В поднял $355 - 220 = 135$, Б поднял $355 - 240 = 115$, А поднял $355 - 250 = 105$. Победил $В = 135$.

Задача 2. Сколько решений в целых числах имеет уравнение

$$\frac{1}{2022} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}?$$

Ответ: 53.

Решение. Избавляясь от знаменателей, получим уравнение

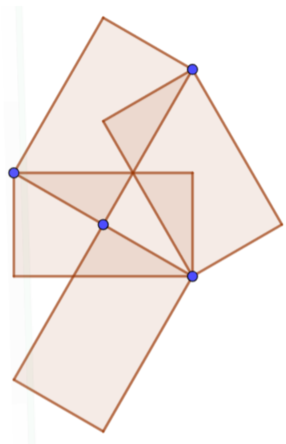
$$(x-2022)(y-2022) = 2022^2.$$

Поскольку $2022^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 337^2$, то число $x - 2022$ может иметь множитель $2^0, 2^1, 2^2$ — всего три варианта. Аналогично с остальными множителями. У числа $x - 2022$ получается $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ возможных натуральных значений, то есть 54 целых значения. Правда, одному из них соответствует $x = 0$, который исходному уравнению не удовлетворяет. Следовательно, корней 53 (при каждом подходящем значении x имеем $y = \frac{2022^2}{x-2022} + 2022$ — целое число).

Задача 3. Можно ли на плоскости расположить четыре одинаковых прямоугольника, чтобы ни одна вершина не была общей для всех прямоугольников, но у любых двух прямоугольников была ровно одна общая вершина? (Прямоугольники могут накладываться друг на друга.)

Ответ: Да.

Решение. См. чертёж.



Возможны и другие примеры.

Задача 4. Для бесконечной последовательности чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$ при всех натуральных $n \geq 4$ выполняется соотношение $x_n = x_{n-1} \cdot x_{n-3}$. Известно, что $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1$. Найдите x_{2022}.

Ответ: 1.

Решение. Все члены последовательности по модулю равны 1. Отметим положительные плюсом, а отрицательные — минусом. Выпишем начало последовательности:

$$[++---+-]++---+-++\ldots$$

Видно, что три стоящих подряд члена полностью определяют то, как последовательность будет выглядеть дальше. Значит, если мы снова увидим $++-$, как в начале, то последовательность начнёт повторяться. Получается, что период равен семи, значит на 2022 месте стоит то же, что и на шестом $(2022 = 6 \pmod 7)$.

Задача 5. Из цифр a, b, c, d, e составлено пятизначное число $\overline{abcde}$. Про двузначные числа $\overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}$, составленные из тех же цифр, известно, что

$$(\overline{ab}+\overline{bc})(\overline{bc}+\overline{cd})(\overline{cd}+\overline{de}) = 157605.$$

Найдите число $\overline{abcde}$. Многозначные числа не могут начинаться с нуля.

Ответ: 12345 или 21436.

Решение. Заметим, что $157605 = 3\cdot5\cdot7\cdot19\cdot79$. Для начала нужно понять, какие сочетания простых множителей соответствуют суммам двузначных чисел. Сумма двузначных чисел не может быть более 99+99=198, а уже $79\cdot3$ больше 200, поэтому какая-то из скобок равна 79. Как могут быть распределены оставшиеся множители? $79(19\cdot5)(3\cdot7)$; $79(19\cdot7)(3\cdot5)$; $79(3\cdot19)(5\cdot7)$; $79(19)(3\cdot5\cdot7)$. Других случаев нет, потому что в них получается множитель больше 198.

Так получаем тройки чисел (79;95;21), (79;133;15), (79;57;35), (79;19;105). Теперь заметим вот что: $(\overline{xy}+\overline{yz}) = 10x+y+10y+z = 10(x+y)+(y+z)$, при этом суммы цифр не могут быть больше 9+9=18. То есть, например, если $(\overline{xy}+\overline{yz}) = 79$, то это значит, что $x+y=7$, $y+z=9$. Если $(\overline{xy}+\overline{yz}) = 133$, то либо $x+y=13$, $y+z=3$, либо $x+y=12$, $y+z=13$. Если $(\overline{xy}+\overline{yz}) = 15$, то либо $x+y=1$, $y+z=5$, либо $x+y=0$, $y+z=15$. Скажем, мы остановимся на наборе чисел (7,9), (12,13), (1,5), где числа означают возможные суммы соседних цифр $\overline{abcde}$.

Но при этом, если взять число $\overline{abcde}$, то у него будет всего 4 возможные пары соседних цифр, поэтому в наборе может быть не более 4-х различных значений. Тем самым мы отметаем выбранный набор, как и все остальные — кроме одного, которым будет (79;57;35), с числами (7,9), (5,7), (3,5). У него всего 4 различных значения: 9,7,5,3. Более того, эти пары чисел нужно разместить так, чтобы значения «состыковались», то есть так: (3,5),(5,7),(7,9). То есть для $\overline{abcde}$ будет верно следующее: $a+b=3$, $b+c=5$, $c+d=7$, $d+e=9$. У такой системы всего 4 решения, соответствующие 5-значным последовательностям $12345, 21436, 30527, 03254$, последняя из которых не подходит, так как начинается с нуля, а предпоследняя — так как для этой последовательности $\overline{bc} = 05$.

Задача 6. В квадратной комнате на каждой стене есть лампочка, которая может гореть одним из семи цветов радуги. В комнате нет лампочек, которые горели бы одним цветом. За один ход человек может поменять цвет одной из лампочек, на тот, которым не горит ни одна лампочка в комнате на момент совершения хода, при этом он тоже изменит цвета на два оставшихся не использованных цвета. (После этого в комнате по-прежнему нет двух лампочек с одинаковыми цветами). Какое наименьшее число ходов нужно совершить, чтобы в результате каждая лампочка погорела каждым из семи цветов?

Ответ: 8 ходов.

Решение. Лампочка на каждой стене комнаты должна шесть раз поменять цвет, всего стены четыре, поэтому суммарное число изменений цветов не меньше 24. С другой стороны, за один ход меняется цвет у трёх лампочек, поэтому число ходов не меньше 8. Можно привести пример для 8 ходов (см. рисунок).