Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова

Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике

Отборочный этап 2021/22 учебного года для 5-6 классов

Задача 1 (15 баллов)

В-1 Вчера Маша прочитала $\frac{1}{4}$ книги, а сегодня — ещё $\frac{1}{15}$ книги. Если она прочтёт ещё 63 страницы, то до конца ей останется прочесть треть книги. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 180

Решение. По условию 63 страницы составляют $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{15} - \frac{1}{3} = \frac{7}{20}$ часть книги. Следовательно, в книге $63 \cdot \frac{20}{7} = 9 \cdot 20 = 180$ страниц.

В-2 Вчера Лена прочитала $\frac{2}{7}$ книги, а сегодня — ещё $\frac{1}{28}$ книги. Если она прочтёт ещё 87 страниц, то до конца ей останется прочесть треть книги. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 252

В-3 Вчера Саша прочитал $\frac{1}{7}$ книги, а сегодня — ещё $\frac{2}{21}$ книги. Если он прочтёт ещё 55 страниц, то до конца ему останется прочесть половину книги. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 210

В-4 Вчера Коля прочитал $\frac{1}{5}$ книги, а сегодня — ещё $\frac{1}{35}$ книги. Если он прочтёт ещё 95 страниц, то до конца ему останется прочесть половину книги. Сколько страниц в этой книге?

Ответ: 350

Задача 2 (15 баллов)

В-1

В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 50 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 385 квартир?

Ответ: 11.

Решение. Поскольку $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$, числа 5, 7 и 11 — это число квартир на этаже, число этажей и число подъездов (в некотором порядке). Но $5 \cdot 11 = 55 > 50$ и $7 \cdot 11 = 77 > 50$, поэтому 11 не может быть ни числом этажей в подъезде, ни числом квартир на этаже. Значит, в доме 11 подъездов.

В-2

В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 60 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 455 квартир?

Ответ: 13.

В-3 В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 30 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 231 квартира?

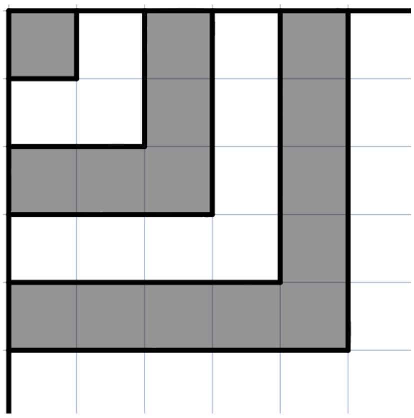
Ответ: 11.

В-4 В многоквартирном доме несколько подъездов, в каждом — одинаковое число этажей (больше одного). На всех этажах всех подъездов одинаковое число квартир (больше одной). Известно, что в каждом подъезде не больше 35 квартир. Сколько подъездов в этом доме, если всего в нём 273 квартиры?

Ответ: 13.

Задача 3 (15 баллов)

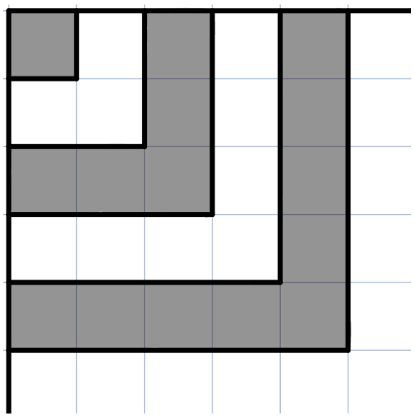
В-1 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, серых плиток потребовалось 120, а белых меньше, причём резать плитки не пришлось. Сколько белых плиток потребовалось?



Ответ: 105

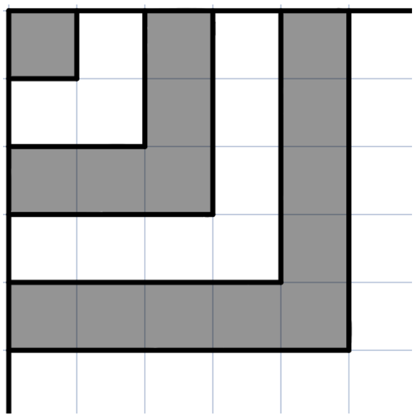
Решение. Заметим, что $1+5+9+\ldots+29=120$. В этой сумме 8 слагаемых, значит, «слоёв» серой плитки было 8, а «слоёв» белой — 7. Поэтому вдоль одной стены зала умещается $8+7=15$ плиток, а во всём зале $15^2=225$ плиток, откуда находим, что белых плиток $225-120=105$.

В-2 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, серых плиток потребовалось 153, а белых больше, причём резать плитки не пришлось. Сколько белых плиток потребовалось?



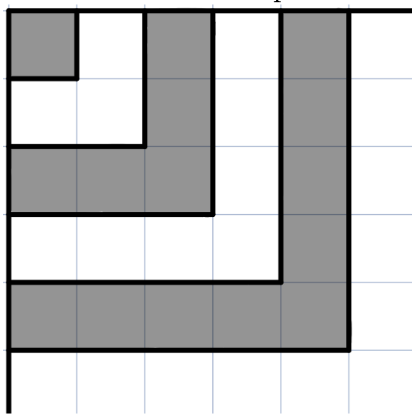
Ответ: 171

В-3 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, белых плиток потребовалось 136, а серых больше, причём резать плитки не пришлось. Сколько серых плиток потребовалось?



Ответ: 153

В-4 Пол квадратного зала выкладывают квадратными плитками одинакового размера белого и серого цвета таким образом, как показано на рисунке: угловая плитка серая, затем три белые, затем пять серых, затем семь белых, и т. д. Чтобы таким образом выложить плиткой весь пол зала, белых плиток потребовалось 171, а серых меньше, причём резать плитки не пришлось. Сколько серых плиток потребовалось?



Ответ: 153

Задача 4 (15 баллов)

В-1 На доске написано 12 различных натуральных чисел, причём их сумма нечётна, а произведение любых 5 из них чётно. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 99

Решение. Поскольку сумма данных чисел нечётна, то среди них нечётных — нечётное число. Поскольку произведение любых 5 из них чётно, то нечётных чисел меньше 5, т. е. 1 или 3. Сумма будет наименьшей, если взять первые чётные и нечётные числа. Если среди них 1 нечётное, то получаем сумму $1 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 22 = 133$, а если 3 нечётных, то сумма равна $1 + 3 + 5 + 2 + 4 + 6 + \ldots + 20 = 113$. Наименьшая возможная сумма равна 113.

В-2 На доске написано 13 различных натуральных чисел, причём их сумма нечётна, а произведение любых 5 из них чётно. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 119

В-3 На доске написано 14 различных натуральных чисел, причём их сумма нечётна, а произведение любых 5 из них чётно. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел?

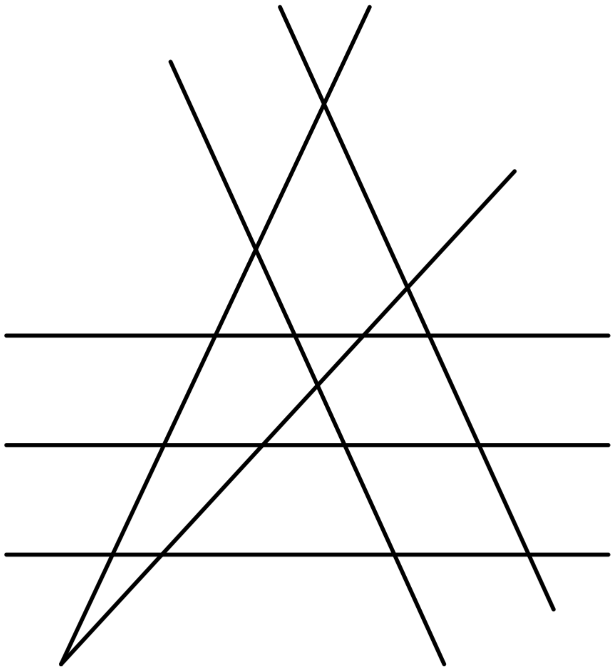
Ответ: 141

В-4 На доске написано 15 различных натуральных чисел, причём их сумма нечётна, а произведение любых 5 из них чётно. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел?

Ответ: 165

Задача 5 (20 баллов)

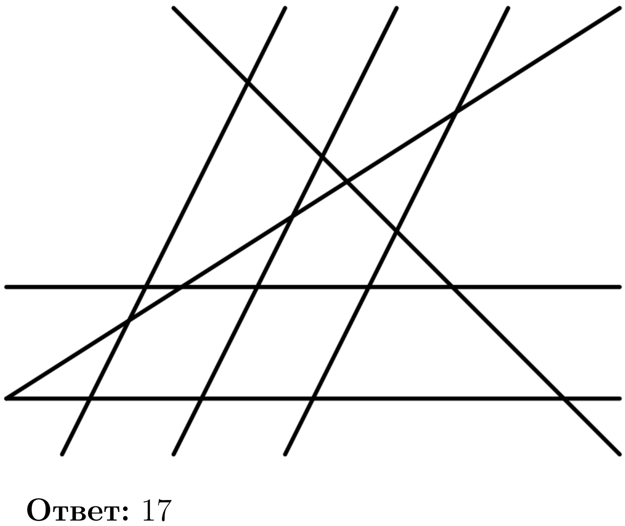
В-1 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три параллельных и ещё две параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 17

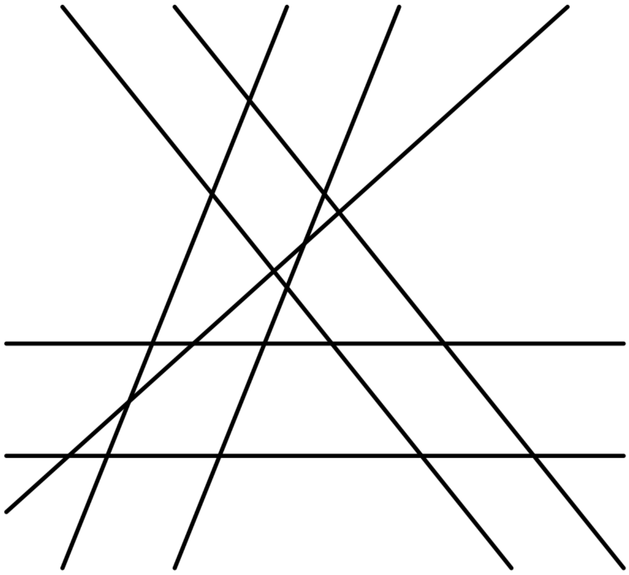
Решение. Три стороны треугольника должны лежать на трёх попарно непараллельных прямых. Если выбирать одну прямую из трёх параллельных, ещё одну из двух других параллельных и одну из двух оставшихся, получится $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ треугольников. Если выбрать одну прямую из трёх параллельных и две другие, не входящие в пару параллельных, получится ещё $3 \cdot 1 \cdot 1 = 3$ треугольника. Наконец, если выбрать одну прямую из двух параллельных и две другие, не входящие в пару параллельных, получится ещё $2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$ треугольника. Итого $12 + 3 + 2 = 17$ треугольников.

В-2 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три параллельных и ещё две параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 17

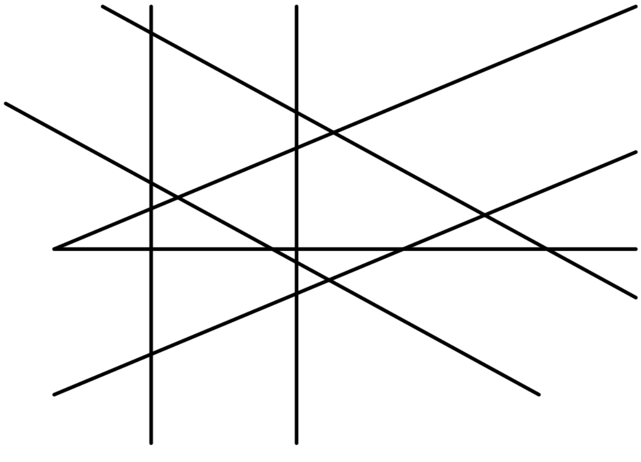
В-3 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три пары параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 20

Решение. Три стороны треугольника должны лежать на трёх попарно непараллельных прямых. Если выбирать по одной прямой из каждой пары параллельных, получится $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ треугольников. Если выбрать две прямые из двух пар параллельных и третью, не входящую в пары параллельных, получится ещё $3 \cdot 2 \cdot 2 = 12$ треугольников (множитель 3 возникает оттого, что есть три способа определить, какую пару параллельных прямых мы не задействуем). Итого $12 + 8 = 20$ треугольников.

В-4 На рисунке изображено 7 прямых, среди которых три пары параллельных. Никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Сколько существует треугольников, все стороны каждого из которых лежат на этих прямых?



Ответ: 20

Задача 6 (20 баллов)

В-1 Дорога из пункта A в пункт B длиной 11,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 2 ч 54 мин, а на обратный путь — 3 ч 6 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 4

Решение. Пусть x — длина пути в гору, y — по равнине, z — под гору. Тогда $x+y+z=11{,}5$, $x/3+y/4+z/5=2{,}9$, $x/5+y/4+z/3=3{,}1$. Складывая последние два уравнения, находим $\frac{8}{15}(x+z)+y/2=6$. Следовательно, с учётом первого уравнения получаем $(\frac{8}{15}-\frac{1}{2})y=11{,}5\cdot\frac{8}{15}-6$, откуда $y=4$ км.

В-2 Дорога из пункта A в пункт B длиной 12,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 3 ч 6 мин, а на обратный путь — 3 ч 24 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 5

В-3 Дорога из пункта A в пункт B длиной 10,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 2 ч 36 мин, а на обратный путь — 2 ч 54 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 3

В-4 Дорога из пункта A в пункт B длиной 13,5 км состоит из трёх участков: в гору, по равнине и под гору. Пешеход идёт в гору со скоростью 3 км/ч, по равнине — со скоростью 4 км/ч, под гору — со скоростью 5 км/ч. Известно, что на дорогу из A в B он потратил 3 ч 24 мин, а на обратный путь — 3 ч 36 мин. Какова длина (в км) участка пути, проходящего по равнине?

Ответ: 6
